# 目　　录

# 第一章 矩阵对策

## 1.1. 引 言

对策论是运筹学的一个重要分支．它所研究的典型问题是两个或两个以上的参加者（称为局中人）在某种对抗性或竞争性的场合下各自作出决策，使自己的一方得到尽可能最有利的结果．

为了对对策论的问题有比较直观的了解，我们首先通过几个简单的实例来阐明一些有关的基本概念．

例1． 配钱币游戏．

两个参加者（称为局中人 1 和 2）各出示一枚钱币，在不让对方看见的情况下，将钱币放在桌上．若两个钱币都呈正面或都呈反面，则局中人 1 得 1 分，局中人 2 得 − 1 分；或者说，局中人2付给局中人 1 一个单位．若两个钱币一正一反，则局中人 1 和 2 分别得 − 1 和 1 分；或者说，局中人 1 输给局中人 2 一个单位．

我们可以用一个方阵来表示这些结果：

局中人 2

| | | 1 （正） | 2 （反） |
|---|---|---|---|
| 局中人 1 | 1 （正） | 1 | − 1 |
| | 2 （反） | − 1 | 1 |

我们说，局中人 1 和局中人 2 各有两个策略．第一行代表局中人 1 的第 1 个策略，表示局中人 1 选择出示钱币的正面；第二行是他的第 2 个策略，表示选择反面．第一列是局中人 2 的第 1 个策略，表示局中人 2 选择正面；第 2 列是他的第 2 个策略，表示

反面.

这种游戏就是一个对策.所谓对策,简略地说,就是一组规则,它规定了整个游戏(或竞赛、或竞争、或斗争)自始至终所应遵循的各项办法和章程,包括局中人、策略、选定策略后的结局、等等.

上面这个表格称为对策的**支付矩阵**. 它是两个局中人的策略的函数. 例如,若局中人1出正面(策略1),局中人2也出正面(策略1),则在上表的第1行第1列处的元素1就是局中人2付给局中人1的数目(例如以元为单位);我们说,局中人1**得到支付**1. 若局中人1选择策略2(反面),局中人2选择策略1(正面),则第2行第1列的元素是-1,表示局中人1得到支付-1. 这就是说,局中人1输掉1个单位;换句话说,局中人2从局中人1处赢进一个单位.

例2. "锤子、剪刀、布"游戏.

无论中外,每个小学生都玩过这种游戏. 锤子击败剪刀,剪刀胜布,布胜锤子. 这里也是两个局中人:局中人1和2. 双方各有三个策略:策略1代表出锤子,策略2代表出剪刀,策略3代表出布. 假定胜者得1分,负者得-1分,则支付矩阵是

| | | 局中人2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 0 | 1 | -1 |
| 局中人1 | 2 | -1 | 0 | 1 |
| | 3 | 1 | -1 | 0 |

例3. 局中人1从$p=0,1,2,3$四个数中选出一个数,局中人2在不知道局中人1出什么数的情况下从$q=0,1,2$三个数中选出一个数. 局中人1得到的支付(即局中人2付给局中人1的数目)由支付函数

$$P = p(q-p) + q(q+p)$$

即

$$P = q^2 - p^2 + 2pq$$

决定.

这是一个二人对策．局中人 1 有四个策略，局中人 2 有三个策略．支付矩阵不难算出如下：

局中人 2

| 局中人 1: $p$ \ $q$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 |
| 1 | -1 | 2 | 7 |
| 2 | -4 | 1 | 8 |
| 3 | -9 | -2 | 7 |

在以上几个例子里，都有 1，2 两个局中人，都有一个支付矩阵．每个局中人有若干个策略；局中人 1 的策略用支付矩阵的行数来表示，局中人 2 的策略则用支付矩阵的列数来表示．每个局中人选定一个策略后，就有一个对应的支付值，这个支付值代表局中人 2 应当付给局中人 1 的数目．如果支付值是正数，局中人 1 从局中人 2 处得到的是正的值，这就是说，局中人 1 从局中人 2 处赢进若干个单位．反之，如果支付值是负数，局中人 1 从局中人 2 处得到的是负的值，这就是说，局中人 1 失去若干个单位，这若干个单位被局中人 2 赢得．

我们现在讨论的对策，局中人 1 得到的支付值就是局中人 2 失去的值．这种对策叫做零和对策．由两个局中人参加的零和对策是对策中最简单的一种，称为**零和二人对策**．

如果局中人的数目不是二，而是$n$，则对策称为**$n$人对策**．$n$人对策又可分为**非合作对策**($n \geqslant 2$)和**合作对策**($n \geqslant 2$)．我们首先

介绍零和二人对策的理论．本章专门论述零和二人对策中的矩阵对策，就是局中人1和2策略的数目都为有限的零和对策．

## 1.2. 矩阵对策

设局中人1有$m$个策略$i=1, \cdots, m$；局中人2有$n$个策略$j=1, \cdots, n$．若局中人1选择策略$i$，局中人2选择策略$j$，局中人1从局中人2得到的支付是$a_{ij}$，则支付矩阵是

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

对策由上列矩阵完全确定，所以这种对策称为矩阵对策．

在这种对策里，局中人1希望支付值$a_{ij}$越大越好，局中人2则希望付出的$a_{ij}$越小越好．因此，矩阵对策完全是对抗性的。

如果局中人1选择他的第1个策略，即$i=1$，则他至少可以得到支付

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{1j}.$$

一般地，如果局中人1采用他的第$i$个策略，则他至少可以得到支付

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}. \tag{1.2}$$

这就是支付矩阵第$i$行元素中的最小元素．由于局中人1希望$a_{ij}$越大越好，因此，他可以选择$i$使（1.2）为最大．这就是说，局中人1可以选择$i$，使得他得到的支付不少于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}. \tag{1.3}$$

同样，如果局中人2选择他的第1个策略，即$j=1$，则他最多失去（输掉）

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{i1}.$$

一般地，如果局中人2采用他的第$j$个策略，则他至多失去

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}. \tag{1.4}$$

这是支付矩阵第$j$列的最大元素.由于局中人2希望$a_{ij}$越小越好，因此，他可以选择$j$使（1.4）为最小.这就是说，局中人2可以选择$j$，保证他失去的不大于

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}. \tag{1.5}$$

也可以说，如果局中人2处理得当，局中人1得到的支付不会大于（1.5）中的值.

既然局中人1可以选择$i$使自己至少可以得到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij},$$

而局中人2可以选择$j$使局中人1最多只能得到

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij},$$

那么，这两个值之间有什么关系没有呢？

我们来看看上一节中的三个例子.在例1中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \max(-1, -1) = -1,$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij} = \min(1,1) = 1.$$

因此，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} < \min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

在例2中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = -1 < 1 = \min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

在例3中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \max(0, -1, -4, -9) = 0,$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij} = \min(0,2,8) = 0.$$

因此，二者相等.

由此可见，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}$和$\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}$可能相等，也可能不相等.在一般情形，必有下列不等式：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}. \tag{1.6}$$

证明如下．对于每一个$i$，有

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant a_{ij},\qquad j=1,\ \cdots,\ n;$$

对于每一个$j$，有

$$a_{ij}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij},\qquad i=1,\ \cdots,\ m.$$

因此，对于一切$i$和一切$j$，有

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}.$$

上式左边与$j$无关，两边对$j$取最小值，得到

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij},\quad i=1,\ \cdots,\ m.$$

再对$i$取最大值，就证明了（1.6）,即

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}.$$

## 1.3． 鞍 点

一个矩阵对策，如果它的支付矩阵（$a_{ij}$）的元素满足

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}=v=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}, \tag{1.7}$$

则称这个值$v$为对策的值，它就是（1.3）和（1.5）的共同值。

上节例 3 中的对策具有值$v=0$.

当（1.7）式成立时，必有一个$i^*$和一个$j^*$，使

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{i^*j}$$

和

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij^*}.$$

所以

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij^*}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{i^*j}.$$

但

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij^*} \geqslant a_{i^*j^*} \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant m} a_{i^*j}.$$

于是有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = v = \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i^*j}.$$

因此，对于一切$i$和一切$j$，有

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}. \tag{1.8}$$

这就是说，如果局中人 1 选取策略$i^*$，则局中人 2 若选择$j^*$以外的策略，支付值不可能小于$v$；如果局中人 2 选取策略$j^*$，则局中人 1 若选择$i^*$以外的策略，支付值不可能大于$v$.

我们称$i^*$和$j^*$分别是局中人 1 和 2 的最优策略，（$i^*$，$j^*$）是对策的一个鞍点.我们也称$i=i^*$，$j=j^*$是对策的一个解.

（1,8）式表明，在鞍点（$i^*,j^*$）处，对策的支付等于对策的值.当局中人 1 坚守他的最优策略$i^*$时,局中人 2 若偏离他的最优策略$j^*$，只能使局中人 1 得到的支付值增大,至少不会减少.当局中人 2 坚守他的最优策略$j^*$时，局中人 1 若偏离他的最优策略$i^*$，只能使支付减少，至少不会增大.

容易证明，（1.8）也是（1.7）的充分条件（参看后面的 1.7节）.这就是说，如果对策有鞍点（$i^*$，$j^*$），则（1.7)成立，且$a_{i^*j^*}=v$.

一个矩阵对策如果有鞍点，鞍点可能不止一个.但是，在不同的鞍点处，支付值都相等，都等于对策的值.

例4. 对策的支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

容易验证，元素$a_{31}$和$a_{32}$所在的位置（3,1）和（3,2）都是对策的鞍点，且

$$a_{31}=a_{32}=v=2.$$

矩阵对策 $(a_{ij})$ 如果有鞍点 $(i^*, j^*)$，则鞍点很容易求出来.根据鞍点的定义（1.8），鞍点处的元素既是它所在的行中的最小元素，又是它所在的列中的最大元素.

在前面1.1节的例3中，$i^*=1$，$j^*=1$ 是对策的鞍点.$a_{11}=0$ 既是第1行中的最小元素，又是第1列中的最大元素.在本节的例4中，$a_{31}=a_{32}=2$ 都是第3行的最小元素，又分别是第1列和第2列的最大元素.

当矩阵对策的鞍点不止一个时，我们有下面的定理.

**定理1.1.** 如果 $(i^*, j^*)$ 和 $(i^\circ, j^\circ)$ 都是矩阵对策 $(a_{ij})$ 的鞍点，则 $(i^*, j^\circ)$ 和 $(i^\circ, j^*)$ 也都是它的鞍点，且在鞍点处的值都相等，即

$$a_{i^*j^*}=a_{i^\circ j^\circ}=a_{i^*j^\circ}=a_{i^\circ j^*}. \tag{1.9}$$

**证明.** 因为 $(i^*, j^*)$ 是鞍点，所以

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j} \tag{1.10}$$

对一切 $i$ 和一切 $j$ 成立.又因为 $(i^\circ, j^\circ)$ 是鞍点，所以

$$a_{ij^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j} \tag{1.11}$$

对一切 $i$ 和一切 $j$ 成立.

由（1.10）和（1.11）有

$$a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^*}\leqslant a_{i^*j^*},$$

这就证明了（1.9）.

然后，根据（1.9）和（1.10），（1.11）可知，

$$a_{ij^\circ}\leqslant a_{i^*j^\circ}\leqslant a_{i^*j}$$

对一切 $i$ 和一切 $j$ 成立.因此，$(i^*, j^\circ)$ 是鞍点.同理，$(i^\circ, j^*)$ 也是鞍点.

这个定理说明了具有鞍点的矩阵对策的两个性质：一是鞍点的可交换性；二是鞍点处的值都相等.

## 1.4. 混合策略

如果矩阵对策没有鞍点，也就是当

$$\max_{1\leq i\leq m}\ \min_{1\leq j\leq n} a_{ij} < \min_{1\leq j\leq n}\ \max_{1\leq i\leq m} a_{ij} \tag{1.12}$$

时，我们不能在上节的意义下求得对策的解.例如，1.1节的"锤子、剪刀、布"对策，支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们已经知道，

$$\max_{1\leq i\leq m}\ \min_{1\leq j\leq n} a_{ij} = -1 < 1 = \min_{1\leq j\leq n}\ \max_{1\leq i\leq m} a_{ij}.$$

局中人1至少可以得到支付－1，局中人2至多失去支付1.在这种情况下，局中人1为了得到大于－1的支付，局中人2为了使支付小于1，双方都将尽最大努力不让对方猜出来自己选择哪一个策略.为此目的，局中人1可以采用一种随机的方法来决定自己要选择的策略；同样，局中人2也将采用随机的方法来决定其策略.这就是本节要引进的混合策略.

设矩阵对策的支付矩阵是$A=(a_{ij})$，其中$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$.局中人1的一个混合策略就是一组数$x_i\geq 0$，$i=1,\cdots,m$，满足

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

局中人2的一个混合策略是一组数$y_j\geq 0$，$j=1,\cdots,n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

相对于混合策略，我们把前两节中所讨论的策略称为纯策略.纯策略$i=i'$其实也是一个特殊的混合策略：$x_{i'}=1$；$x_i=0$若$i\neq i'$.

设$X=(x_1,\cdots,x_m)$和$Y=(y_1,\cdots,y_n)$分别是局中人1和2的混合策略.局中人1以概率$x_i$选用策略$i$，局中人2以概率$y_j$选用策略$j$.因此，局中人1选择策略$i$，局中人2选择策略$j$，并且

支付为$a_{ij}$的概率是$x_i y_j$.每一个支付$a_{ij}$乘以相应的概率$x_i y_j$,对所有的$i$和所有的$j$求和，我们就得到局中人1的**期望支付**

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.13}$$

局中人1希望这个期望支付越大越好,局中人2则相反,希望它越小越好.设$S_m$是满足

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\cdots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

的一切$X=(x_1,\cdots,x_m)$的集.如果局中人1选用策略$X \in S_m$，则他的期望支付至少是

$$\min_{Y \in S_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{1.14}$$

这里$S_n$是满足

$$y_j \geqslant 0, \quad j=1, \cdots n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

的一切$Y=(y_1,\cdots,y_n)$的集.局中人1可以选择$X \in S_m$使(1.14)为最大，也就是说，他可以保证自己能得到的期望支付不小于

$$v_1 = \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.15}$$

如果局中人2选用混合策略$Y \in S_n$，则他应付出的期望支付最多是

$$\max_{X \in S_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.16}$$

局中人2可以选择$Y \in S_n$使（1.16）为最小，也就是说，他可以使局中人1得到的期望支付不超过

$$v_2 = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.17}$$

我们有

**定理1.2.**

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

$$\leqslant\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j. \tag{1.18}$$

**证明.** 首先，对于一切$X\in S_m$和一切$Y\in S_n$，有

$$\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

两边对$X\in S_m$取最大值

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\leqslant\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

再对$Y\in S_n$取最小值，即得

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

$$\leqslant\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j. \qquad \blacksquare$$

J. von Neumann首先证明了上式中等号对于一切矩阵对策成立.这一结果就是著名的**对策论基本定理**，或者叫做**最小最大值定理**.

## 1.5. 最小最大值定理

最小最大值定理有许多证法.在对策论文献中，已发表的证明为数颇多.本节我们介绍von Neumann在他和O. Morgenstern合著的经典著作〔19〕中给出的这一定理的证明.

**定义.** 设

$$a^{(1)}=(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{m1}),$$
$$a^{(2)}=(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{m2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(n)}=(a_{1n},\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{mn})$$

是$m$维空间中的$n$个点.并设

$$a=(a_1, a_2, \cdots, a_m).$$

若存在

$$t_k \geqslant 0, \ k=1,\cdots, n, \ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1,$$

使

$$a = t_1 a^{(1)} + t_2 a^{(2)} + \cdots + t_n a^{(n)},$$

则称点$a$属于$a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $\cdots$, $a^{(n)}$的凸包$H$.

$$t_1 a^{(1)} + t_2 a^{(2)} + \cdots + t_n a^{(n)}$$

是$a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$的凸线性组合. $H$确为一凸集. 这是因为,若
$a \in H$, $b \in H$, 则

$$a = t_1 a^{(1)} + t_2 a^{(2)} + \cdots + t_n a^{(n)},$$
$$b = s_1 a^{(1)} + s_2 a^{(2)} + \cdots + s_n a^{(n)}$$

其中$t_k \geqslant 0$, $s_k \geqslant 0$, $k=1$, $\cdots$, $n$, 且$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \sum_{k=1}^{n} s_k = 1$.

于是$a$和$b$的凸线性组合可表为

$$c = \lambda a + (1-\lambda) b, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

我们有

$$c = \lambda a + (1-\lambda) b = \sum_{k=1}^{n} [\lambda t_k + (1-\lambda) s_k] a^{(k)}.$$

由于

$$\lambda t_k + (1-\lambda) s_k \geqslant 0, \qquad k=1, \cdots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} [\lambda t_k + (1-\lambda) s_k] = \lambda \sum_{k=1}^{n} t_k + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n} s_k$$
$$= \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

所以

$$c = \lambda a + (1-\lambda) b \in H.$$

因而 $H$ 为凸集.

为了证明最小最大值定理，我们需要下面的两个引理.

引理1. 设 $H$ 是

$$a^{(1)} = (a_{11}, \ a_{21}, \ \cdots, a_{m1}),$$
$$a^{(2)} = (a_{12}, \ a_{22}, \ \cdots, a_{m2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(n)} = (a_{1n}, \ a_{2n}, \cdots, a_{mn})$$

的凸包，且原点$O \notin H$.则存在 $m$ 个实数 $s_1$，$s_2$，$\cdots$，$s_m$，对于$H$中任意一点

$$a = (a_1, \ a_2, \cdots, \ a_m),$$

有

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_m a_m > 0.$$

**证明.** 因为$O \notin H$，存在异于$O$的点 $s = (s_1, s_2, \ \cdots, s_m) \in H$，使得$|s|$为最小，即

$$s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_m^2 > 0$$

为最小.今设 $a = (a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_m)$为 $H$ 中任意一点，则

$$\lambda a + (1 - \lambda) s \in H, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

且

$$|\lambda a + (1 - \lambda) s|^2 \geqslant |s|^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{m} \Big[\lambda a_i + (1 - \lambda) s_i\Big]^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big[\lambda(a_i - s_i) + s_i\Big]^2$$
$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{m} (a_i - s_i)^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{m} (a_i - s_i) s_i + \sum_{i=1}^{m} s_i^2$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} s_i^2.$$

当$\lambda \neq 0$时，

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} (a_i - s_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} (a_i s_i - s_i^2) \geqslant 0.$$

令 $\lambda \to 0$，得到

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} s_i^2 > 0. \qquad \blacksquare$$

引理 1 称为支承超平面定理.这个定理表明,若$O$不属于$a^{(1)}$, $a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$的凸包$H$，则存在一过$O$的支承超平面$p$,使整个$H$位于$p$的一侧，也就是位于由$p$划分形成的两个半空间之一中.

**引理2**. 设$A=(a_{ij})$为任意$m\times n$矩阵，则下列二不等式之一成立：

（1）存在$y_j\geqslant 0$，$j=1$，$\cdots$，$n$，$\sum\limits_{j=1}^{n}y_j=1$，使

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n\leqslant 0,\qquad i=1,\ \cdots,\ m.$$

（2）存在$x_i\geqslant 0$，$i=1$，$\cdots$，$m$，$\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=1$，使

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+\cdots+a_{mj}x_m>0,\quad j=1,\ \cdots,\ n.$$

**证明**. 设$H$是$n+m$个点

$$\begin{aligned}
a^{(1)}&=(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{m1}),\\
a^{(2)}&=(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{m2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a^{(n)}&=(a_{1n},\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{mn}),\\
e^{(1)}&=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\\
e^{(2)}&=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e^{(m)}&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)
\end{aligned}$$

的凸包.分两种情形：

（1）$O\in H$.则$O$可以表成上列$n+m$个点的凸线性组合.这就是说，存在

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n+m}\geqslant 0,\qquad \sum_{j=1}^{n+m}t_j=1,$$

使得

$$t_1a^{(1)}+t_2a^{(2)}+\cdots+t_na^{(n)}+t_{n+1}e^{(1)}+t_{n+2}e^{(2)}+\cdots+t_{n+m}e^{(m)}=O.$$

用分量表示，第 $i$ 个（共 $m$ 个）等式是

$$t_1a_{i1}+t_2a_{i2}+\cdots+t_na_{in}+t_{n+i}\cdot 1=0,$$

即

$$t_1a_{i1}+t_2a_{i2}+\cdots+t_na_{in}=-t_{n+i}\leqslant 0,\quad i=1,\ \cdots,\ m. \qquad (1.19)$$

由此可知，

$$t_1+t_2+\cdots+t_n>0.$$

因若不然，则

$$t_1=t_2=\cdots=t_n=0=t_{n+1}=\cdots=t_{n+m},$$

与 $\sum_{j=1}^{n+m}t_j=1$ 相矛盾.

以 $t_1+t_2+\cdots+t_n>0$ 除（1.19）式，并令

$$\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_n}=y_1,\quad \frac{t_2}{t_1+\cdots+t_n}=y_2,\quad \cdots,$$

$$\frac{t_n}{t_1+\cdots+t_n}=y_n,$$

得到

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n\leqslant 0,\qquad i=1,\cdots,m.$$

（2）$O\notin H$. 由引理1，存在 $s=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_m)\in H$，使得

$$s\cdot a^{(j)}=s_1a_{1j}+s_2a_{2j}+\cdots+s_ma_{mj}>0,\quad j=1,\ \cdots,n, \quad (1.20)$$

$$s\cdot e^{(i)}=s_i>0,\qquad i=1,\ \cdots,\ m.$$

以 $s_1+s_2+\cdots+s_m>0$ 除（1.20）式，并令

$$\frac{s_1}{s_1+\cdots+s_m}=x_1,\quad \frac{s_2}{s_1+\cdots+s_m}=x_2,\quad \cdots,$$

$$\frac{s_m}{s_1+\cdots+s_m}=x_m,$$

得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+\cdots+a_{mj}x_m>0,\quad j=1,\cdots,n. \qquad \blacksquare$$

**定理1.3.** （最小最大值定理）

设矩阵对策的支付矩阵是 $A=(a_{ij})$，则

$$v_1=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

$$=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=v_2. \quad (1.21)$$

**证明.** 前已证明 $v_1\leqslant v_2$（定理1.2），今证明 $v_1\geqslant v_2$.

由引理2，下列两种情形之一成立：

（1）存在 $y_1,\cdots,y_n\geqslant0$，$\sum_{j=1}^{n}y_j=1$，使得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\leqslant0,\quad i=1,\cdots,m.$$

因此，对于任意的$X=(x_1,\cdots,x_m)\in S_m$，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)x_i\leqslant0.$$

所以

$$\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\leqslant0.$$

因而

$$v_2=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\leqslant0. \quad (1.22)$$

（2）存在 $x_1,\cdots,x_m\geqslant0$，$\sum_{i=1}^{m}x_i=1$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i>0,\quad j=1,\cdots,n.$$

因此，对于任意的 $Y=(y_1,\cdots,y_n)\in S_n$，

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j\geqslant0.$$

所以

$$\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\geqslant 0.$$

因而

$$v_1=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\geqslant 0. \qquad (1.23)$$

由（1.22）和（1.23），

$$v_1\geqslant 0 \text{ 或 } v_2\leqslant 0.$$

所以

$$v_1<0<v_2 \quad \text{不可能同时成立.}$$

今对矩阵

$$(a_{ij}-k)=\begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12}-k & \cdots & a_{1n}-k \\ a_{21}-k & a_{22}-k & \cdots & a_{2n}-k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-k & a_{m2}-k & \cdots & a_{mn}-k \end{pmatrix}$$

重复上面的论证，其中 $k$ 为任意实数，得到

$$v_1-k<0<v_2-k \quad \text{不成立,}$$

即

$$v_1<k<v_2 \quad \text{不成立.} \qquad (1.24)$$

因此，$v_1<v_2$ 不成立；否则必有一实数 $k$ 使 $v_1<k<v_2$，与（1.24）矛盾．我们证明了

$$v_1\geqslant v_2. \qquad ■$$

## 1.6. 最小最大值定理的另一种证明

在本节中，我们给出最小最大值定理的另一种证明——一种归纳法证明；参看[26]，[27]和[9].

首先，我们推导一组数对混合策略取最小（大）值与该组数的最小（大）值之间的关系.

设有一组数 $c_1$，…，$c_n$，并设 $Y=(y_1, \cdots, y_n)$ 为混合策

略．假定

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} c_j=c_l,$$

则

$$c_j\geqslant c_l,\quad j=1,\cdots,n,$$

因而

$$c_jy_j\geqslant c_ly_j,\ j=1,\cdots,n.$$

对于每一个$Y\in S_n$，有

$$\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\geqslant\sum_{j=1}^{n}c_ly_j=c_l.$$

因此，

$$\min_{Y\in S_n}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\geqslant c_l. \tag{1.25}$$

另一方面，$Y=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$是一个特殊的混合策略，其中第$l$个分量为1.我们有

$$\begin{aligned}c_l&=c_1\cdot0+c_2\cdot0+\cdots+c_l\cdot1+\cdots+c_n\cdot0\\&\geqslant\min_{Y\in S_n}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\ .\end{aligned} \tag{1.26}$$

由（1.25）和（1.26）可知，

$$\min_{Y\in S_n}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j=c_l=\min_{1\leqslant j\leqslant n}c_j. \tag{1.27}$$

同理可得

$$\max_{X\in S_m}\sum_{i=1}^{m}d_ix_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}d_i. \tag{1.28}$$

利用（1.27）和（1.28），可以把$v_1$和$v_2$改写成下列形式：

$$\begin{aligned}v_1&=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j\\&=\max_{X\in S_m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i,\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$v_2 = \min_{Y\in S_n} \max_{X\in S_m} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right) x_i$$

$$= \min_{Y\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j. \qquad (1.30)$$

因此，最小最大值定理可以表为

**定理1.4.** （最小最大值定理）

$$\max_{X\in S_m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \min_{Y\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad (1.31)$$

其中 $(a_{ij})$ 是任意 $m\times n$ 矩阵，$S_m$ 和 $S_n$ 分别是点 $X=(x_1, \cdots, x_m)$ 和 $Y=(y_1, \cdots, y_n)$ 的集合，满足

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1, \cdots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j=1, \cdots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

**证明.** 用归纳法证明.

当 $m=n=1$ 时，定理显然成立.今证明若定理对于一切 $(m'<m, n)$ 成立，则必对于 $(m, n)$ 成立.（同样可证,若定理对于一切 $(m, n'<n)$ 成立，则必对于 $(m, n)$ 成立.）

记

$$v_1^{(m,n)} = \max_{X\in S_m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \qquad (1.32)$$

$$v_2^{(m,n)} = \min_{Y\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j. \qquad (1.33)$$

设

$$v_2^{(m,n)} = \min_{Y\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^*, \qquad (1.34)$$

其中 $(y_1^*, \cdots, y_n^*) = Y^* \in S_n$，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leqslant v_2^{(m, n)}, \quad i=1, \cdots, m. \qquad (1.35)$$

如果在 (1.35) 式中等号对于一切 $i=1, \cdots, m$ 成立，而且在一个对应于 (1.32) 式的“大于或等于”的公式中等号对于一切 $j=1, \cdots, n$ 成立，则定理很容易证明.因此，不丧失一般性，我们可以假定

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v_2^{(m, n)}, \quad i=1, \cdots, m', \qquad (1.36)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* < v_2^{(m, n)}, \quad i=m'+1, \cdots, m, \qquad (1.37)$$

其中 $m' < m$.

考虑缩小的矩阵对策 $(i=1, \cdots, m'; \ j=1, \cdots, n)$. 我们证明下列一系列不等式：

$$\underset{(a)}{v_2^{(m', n)} = v_1^{(m', n)}} \underset{(b)}{\leqslant} v_1^{(m, n)} \underset{(c)}{\leqslant} v_2^{(m, n)} \underset{(d)}{\leqslant} v_2^{(m', n)}. \qquad (1.38)$$

这里 (a) 是归纳法假设；(c) 就是 (1.18) 式，显然成立. 要证明的是 (b) 和 (d).

先证 (b)，即 $v_1^{(m', n)} \leqslant v_1^{(m, n)}$. 设

$$S_{m'} = \{X = (x_1, \cdots, x_{m'})\},$$

$$S_{m'}^0 = \{X = (x_1, \cdots, x_{m'}, 0, \cdots, 0)\} \subset S_m,$$

其中 $x_i \geqslant 0$，$\sum x_i = 1$. 于是有

$$v_1^{(m', n)} = \max_{X \in S_{m'}} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} x_i$$

$$= \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} x_i^* \quad [X' = (x_1^*, \cdots, x_{m'}^*) \in S_{m'}]$$

$$= \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^*$$

$$[X^* = (x_1^*, \cdots, x_{m'}^*, 0, \cdots, 0) \in S_{m'}^0 \subset S_m]$$

$$\leqslant \max_{X \in S_m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = v_1^{(m, n)}.$$

现在证明 $(d)$，即 $v_2^{(m, n)} \leqslant v_2^{(m', n)}$.

设对于缩小的对策，

$$v_2^{(m', n)} = \min_{Y \in S_n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m'} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant m'} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y'_j, \tag{1.39}$$

其中 $(y'_1, \cdots, y'_n) = Y' \in S_n$. 令

$$Y'' = \alpha Y' + (1-\alpha) Y^* \in S_n, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.40}$$

其中 $Y'' = (y''_1, \cdots, y''_n)$，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y''_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y'_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*_j,$$

$$i = 1, \cdots, m'. \tag{1.41}$$

对 (1.41) 式两端取 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m'}$，并利用 (1.39) 和 (1.36)，我们得到

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m'} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y''_j \leqslant \alpha v_2^{(m', n)} + (1-\alpha) v_2^{(m, n)}. \tag{1.42}$$

(由于 (1.41) 右边最后一项是常数，所以实际上 (1.42) 式中等号成立.)

对于 (1.40) 中的 $Y''$，根据 (1.37) 及函数的连续性，当 $\alpha$ 充分小时，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y''_j < v_2^{(m, n)}, \quad i = m'+1, \cdots, m. \tag{1.43}$$

但由 (1.33) 可知，

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y''_j \geqslant \min_{Y \in S_n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = v_2^{(m, n)}. \tag{1.44}$$

由 (1.43) 和 (1.44) 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m'}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j''\geqslant v_2^{(m,\ n)}.$$

因此，我们可以把（1.42）的左端换为 $v_2^{(m,\ n)}$，得到

$$\alpha v_2^{(m',n)}\geqslant v_2^{(m,\ n)}-(1-\alpha)v_2^{(m,\ n)}=\alpha v_2^{(m,\ n)},$$

或

$$v_2^{(m,\ n)}\leqslant v_2^{(m',\ n)}.$$

我们证明了不等式组（1.38）成立，因而

$$v_1^{(m,\ n)}=v_2^{(m,\ n)}.$$ ■

## 1.7. 混合策略下的鞍点

设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$是矩阵对策的支付矩阵；$X=(x_1,\ \cdots,\ x_m)\in S_m$和$Y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in S_n$分别是局中人1和2的混合策略．则

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

可以用矩阵的记号简写成下列形式：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=XAY^t,$$

上标 $t$ 表示矩阵的转置．

**定义**．设$X^*\in S_m$, $Y^*\in S_n$．如果对于一切$X\in S_m$和一切$Y\in S_n$有

$$XAY^{*t}\leqslant X^*AY^{*t}\leqslant X^*AY^t,\qquad(1.45)$$

则称$(X^*,\ Y^*)$是矩阵对策 $A=(a_{ij})$的一个鞍点（在混合策略意义下）．

下面的定理表明鞍点存在和最小最大值定理的等价性．

**定理1.5.** 矩阵对策 $A=(a_{ij})$有鞍点的充要条件是

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}XAY^t \quad 和 \quad \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}XAY^t\qquad(1.46)$$

存在且相等．

**证明.** **必要性.**（1.46）中二式显然存在. 设 $XAY'$ 有鞍点，并设 $(X^*, Y^*)$ 是一个鞍点. 这就是说，不等式

$$XAY^{*\prime} \leqslant X^*AY^{*\prime} \leqslant X^*AY' \tag{1.47}$$

对于一切 $X \in S_m$ 和一切 $Y \in S_n$ 成立. 由（1.47）左边的不等式有

$$\max_{X \in S_m} XAY^{*\prime} \leqslant X^*AY^{*\prime},$$

因而

$$\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} XAY' \leqslant X^*AY^{*\prime}. \tag{1.48}$$

同理，由（1.47）右边的不等式有

$$X^*AY^{*\prime} \leqslant \min_{Y \in S_n} X^*AY' \leqslant \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} XAY'. \tag{1.49}$$

由（1.48）和（1.49）得到

$$\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} XAY' \leqslant \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} XAY'.$$

但已知反方向的不等式成立（见定理1.2），因此，

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} XAY' = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} XAY',$$

必要性得证.

**充分性.** 设（1.46）中二式相等，并设

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} XAY' = \min_{Y \in S_n} X^*AY', \tag{1.50}$$

$$\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} XAY' = \max_{X \in S_m} XAY^{*\prime}. \tag{1.51}$$

则由最小、最大值的定义，

$$\min_{Y \in S_n} X^*AY' \leqslant X^*AY^{*\prime}, \tag{1.52}$$

$$X^*AY^{*\prime} \leqslant \max_{X \in S_m} XAY^{*\prime}. \tag{1.53}$$

由假设，（1.50），（1.51）两式的左边相等，因而（1.50），（1.51），（1.52），（1.53）四式中的各项都相等，特别是

$$\max_{X \in S_m} XAY^{*\prime} = X^*AY^{*\prime}.$$

因此，对于一切$X\in S_m$有

$$XAY^{*\prime}\leqslant X^*AY^{*\prime}. \qquad (1.54)$$

同理，对于一切$Y\in S_n$有

$$X^*AY^{*\prime}\leqslant X^*AY'. \qquad (1.55)$$

（1.54）和（1.55）表明，（$X^*$，$Y^*$）是$XAY'$的一个鞍点.■

## 1.8. 最优策略及其性质

如果矩阵对策$A=(a_{ij})$有鞍点（上节已经证明，鞍点必定存在），$(X^*,Y^*)$是它的一个鞍点，即，如果对于一切$X\in S_m$和一切$Y\in S_n$有

$$XAY^{*\prime}\leqslant X^*AY^{*\prime}\leqslant X^*AY', \qquad (1.45)$$

我们称$X^*$，$Y^*$分别是局中人1和2的最优策略，并称

$$X^*AY^{*\prime}$$

是对策的值. 这就是说，在鞍点（$X^*$，$Y^*$）处，对策的期望支付就是对策的值. 我们也称（$X^*$，$Y^*$）是对策的一个解. 由上节的定理1.5可知，对策的值就是

$$v_1=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}XAY'$$

和

$$v_2=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}XAY'$$

的共同值$v$.

鞍点的定义（1.45）表明，只要局中人1坚守他的最优策略$X^*$，则不论局中人2选择什么策略，局中人1至少能够得到期望支付$X^*AY^{*\prime}$；同样，只要局中人2坚守他的最优策略$Y^*$，则不论局中人1选择什么策略，都不能使期望支付超过$X^*AY^{*\prime}$.

以下我们采用一些常用的矩阵记号.

以$A_{i\cdot}$表示矩阵$A$的第$i$个行向量，以$A_{\cdot j}$表示它的第$j$个列向量，则

$$XA_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i, \qquad A_{i\cdot}Y'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j.$$

第一个式子表示局中人1采用混合策略$X$而局中人2采用纯策略$j$时的期望支付；第二个式子表示局中人2采用混合策略$Y$而局中人1采用纯策略$i$时的期望支付.

下面是最优策略的一些性质.

**定理1.6.** 设$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$是矩阵对策的支付矩阵，$v$是对策的值.

（1）设$Y^*$是局中人2的一个最优策略.如果对于某个$i$有

$$A_{i\cdot}Y^{*t}<v,$$

则在局中人1的任何一个最优策略$X^*$中必有$x_i^*=0$.

（2）设$X^*$是局中人1的一个最优策略.如果对于某个$j$有

$$X^*A_{\cdot j}>v,$$

则在局中人2的任何一个最优策略$Y^*$中必有$y_j^*=0$.

**证明.** 我们只证明（1）.

因为$Y^*$是局中人2的最优策略，所以

$$A_{i\cdot}Y^{*t}\leqslant v.$$

令

$$S_1=\{i:A_{i\cdot}Y^{*t}<v\},\quad S_2=\{i:A_{i\cdot}Y^{*t}=v\}.$$

则

$$v=X^*AY^{*t}=\sum_{i=1}^{m}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t}=\sum_{i\in S_1}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t}+\sum_{i\in S_2}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t}$$

$$=\sum_{i\in S_1}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t}+\sum_{i\in S_2}x_i^*v.$$

因此，

$$v\Big(1-\sum_{i\in S_2}x_i^*\Big)=\sum_{i\in S_1}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t},$$

即

$$v\sum_{i\in S_1}x_i^*=\sum_{i\in S_1}x_i^*A_{i\cdot}Y^{*t},$$

或

$$\sum_{i \in S_1} (v - A_{i}.Y^{*t}) x_i^* = 0.$$

因为 $i \in S_1$，所以 $v - A_{i}.Y^{*t} > 0$，因而 $x_i^* = 0$. ∎

这个定理告诉我们，如果已知矩阵对策的值是 $v$，并且 $Y^*$ 是局中人 2 的一个最优策略，若局中人 1 采用纯策略 $i$ 时他的期望支付达不到 $v$，则 $i$ 这个纯策略是不可取的，在局中人 1 的任何一个最优策略 $X^*$ 中一定不会包含这个纯策略.

**定理1.7.** 设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 是矩阵对策的支付矩阵，$v$ 是对策的值.

（1）$X^* \in S_m$ 是局中人 1 的最优策略的充要条件是

$$v \leqslant X^* A._j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

（2）$Y^* \in S_n$ 是局中人 2 的最优策略的充要条件是

$$A_i.Y^{*t} \leqslant v, \quad i = 1, \cdots, m.$$

**证明.** 我们只证明（1）.

**必要性.** 显然.

**充分性.** 假定

$$v \leqslant X^* A._j, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{1.56}$$

设 $(X^\circ, Y^\circ)$ 是对策的一个鞍点，即

$$XAY^{\circ t} \leqslant X^\circ AY^{\circ t} \leqslant X^\circ AY^t \tag{1.57}$$

对于一切 $X \in S_m$ 和一切 $Y \in S_n$ 成立.

我们要证明，$(X^*, Y^\circ)$ 是对策的一个鞍点.

设 $Y = (y_1, \cdots, y_n) \in S_n$ 是局中人 2 的任意混合策略. (1.56) 式的两端各乘以 $y_j$，然后对 $j$ 从 1 到 $n$ 求和：

$$v \leqslant \sum_{j=1}^{n} X^* A._j y_j = X^* AY^t. \tag{1.58}$$

特别有

$$v \leqslant X^* AY^{\circ t}. \tag{1.59}$$

由鞍点的定义 (1.57) 知，

$$X^* AY^{\circ t} \leqslant X^\circ AY^{\circ t} = v. \tag{1.60}$$

由（1.59）和（1.60）有

$$X^*AY^{o\prime}=X^oAY^{o\prime}=v. \tag{1.61}$$

结合（1.57），（1.61）和（1.58），即得

$$XAY^{o\prime}\leqslant X^*AY^{o\prime}\leqslant X^*AY',$$

这就证明了（$X^*$，$Y^o$）是对策的一个鞍点．因此，$X^*$是局中人1的一个最优策略．∎

如果已知对策的值$v$，就可以利用上面这个定理，检验局中人1或2的某个策略$X^*$或$Y^*$是否他的最优策略．

## 1.9. 策略的优超性

设矩阵对策的支付矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

对支付矩阵的元素稍加考察，就不难看出，局中人1决不会采用他的第一个策略．这是因为，不论局中人2选择什么策略，局中人1的第3个策略的支付总比第1个策略的支付为大．因此，局中人1的第1个策略必定只能以零概率出现在他的最优混合策略里．

这样，要解上面这个矩阵对策，可以将矩阵的第一行划去，只要解矩阵对策

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

就行了．

再对上面这个2×3矩阵进行考察．局中人2将他的策略1和策略3进行比较，他显然不愿采用策略1．不论局中人1采用哪一个策略，局中人2的第3个策略的支付都小于第1个策略的支付．

因此，可以将上面这个矩阵的第一列划去，只要解矩阵对策

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

就行了.而这个$2\times2$的矩阵对策，容易验证它的解是混合策略解：

$$X^*=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ Y^*=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

再回到原来的$3\times3$矩阵对策(1.62)，不难想像，它的解应是

$$X^*=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ Y^*=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),v=0.$$

由此可见，在（1.62）中，就局中人1而言，他的第3个策略比第1个策略好，得到的支付大，所以他不必考虑策略1．在（1.63）中，局中人2的第3个策略比第1个策略好，付出的支付小，所以他不会采用策略1．

下面我们介绍优超性的概念.

**定义．** 设矩阵对策的支付矩阵是$A=(a_{ij})$．如果

$$a_{kj}\geqslant a_{lj},\quad j=1,\ \cdots,\ n, \tag{1.65}$$

则称局中人1的策略$k$优超于策略$l$.

如果

$$a_{ik}\leqslant a_{il},\quad i=1,\ \cdots,\ m, \tag{1.66}$$

则称局中人2的策略$k$优超于策略$l$.

如果在（1.65），（1.66）式中成立严格的不等号，则分别称局中人1，2的策略$k$严格优超于策略$l$.

对于混合策略，也有类似的优超性概念.

我们现在只考虑一个纯策略被另外若干个纯策略的凸线性组合所优超的情形.

可以证明，在这种情形，如果是严格优超，则将被优超的那个纯策略所对应的行或列划去后，从剩下的较小的矩阵对策的最优策略，就可以得到原来对策的最优策略，只要将划去的那一行或列所对应的纯策略赋以概率0.

如果是优超而不是严格优超，仍可以从较小的矩阵对策的解得到原来对策的解，但这时有可能“失去”某些解．这就是说，从较小矩阵对策的解，得到的可能不是全部最优策略.当然，如果

我们只要求得到一个解，而不是全部解（通常的情形正是如此），就可以应用这种优超性来简化求解的过程.

例5. 设矩阵对策的支付矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

局中人1的策略1被他的策略3优超，可以将矩阵的第1行划去：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

局中人2的第1个策略被他的第3个策略优超，可以将矩阵的第1列划去：

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

不难看出，这个3×3矩阵对策的元素满足下列关系：

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \geqslant \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

因此，又可以将这个3×3矩阵的第1列划去，得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

这个3×2矩阵的第1行元素被第2，3行元素的一个凸线性组合所优超：

$$(2\ \ 3) \leqslant \frac{1}{2}(4\ \ 2) + \frac{1}{2}(0\ \ 8),$$

因此，又可以将这个3×2矩阵的第1行划去，得到

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

容易验证,这个 $2\times2$ 矩阵对策的最优策略是 $X^*=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$, $Y^*=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$, 值为$\frac{16}{5}$.

这个 $2\times2$ 矩阵是原来的 $4\times4$ 矩阵第3,4行和第3,4列组成的子矩阵·因此,

$$X^*=\left(0,0,\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right),\quad Y^*=\left(0,0,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$$

是原来的矩阵对策的最优策略,它的值是$\frac{16}{5}$.

例6. 设矩阵对策的支付矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

这个对策有一个鞍点,在 $i=1$, $j=3$ 处.因此,(1,3)是对策的解,$a_{13}=3$ 是对策的值.

如果我们利用策略的优超性,可以先划去矩阵的第3行,然后在剩下的 $2\times3$ 矩阵中再划去第1列,余下一个 $2\times2$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

这里右上角的元素所在的位置仍是一个鞍点.对于原来的 $3\times3$ 矩阵来说,仍然得到最优策略

$$X_1^*=(1,0,0),\quad Y_1^*=(0,0,1).$$

但是,除此以外,混合策略

$$X_2^*=\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right),\quad Y_2^*=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

也是对策的一个解.这一事实不难利用上节的定理1.7加以验证.

参看后面1.12节中的例7.

实际上，$X_1^*$和$X_2^*$的任何凸线性组合都是局中人1的最优策略；$Y_1^*$和$Y_2^*$的任何凸线性组合都是局中人2的最优策略.

这个例子表明，正如前面提到过的，利用策略的优超性（不是严格优超性）划去支付矩阵的某些行或列得出较小对策的解，加上零概率后成为原来的对策的解，这一过程可能会“失去”原对策的一些解.

## 1.10. 2×n和m×2矩阵对策的图解法

设2×3矩阵对策的支付矩阵$A$为

$$\begin{array}{ccc} & & \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \\ x & ① & \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right). \\ 1-x & ② & \end{array}$$

以①，②分别表示局中人1的第1，2个纯策略；$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$表示局中人2的第1，2，3个纯策略.

设局中人1采用混合策略$X=(x, 1-x)$，这里$0\leqslant x\leqslant 1$. $x=1$代表纯策略①，$x=0$代表纯策略②.

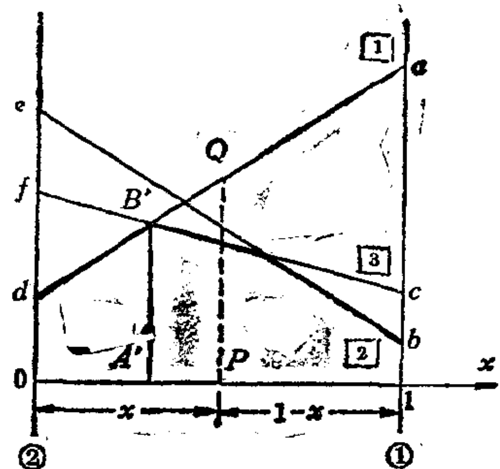



图 1.1

当$x=1$，即局中人1采用纯策略①时，若局中人2采用纯策略$\boxed{1}$，期望支付为$a$，见图1.1. 当$x=0$，即局中人1采用纯策略②时，对应于$\boxed{1}$的期望支付为$d$. 连接图1.1中的直线$ad$.

设$x$轴上点$P$的坐标为$x$. 容易证明，纵坐标$PQ$为局中人1采用混合策略$X$而局中人2采用纯策略$\boxed{1}$时的期望支付.

同样，$be$和$cf$上点的纵坐标分别表示局中人1采用$X$而局中人2采用纯策略$\boxed{2}$和$\boxed{3}$时的期望支付.

对于局中人1的每一个混合策略$X$，他至少可以得到$ad$, $be$, $cf$三条直线在$x$处纵坐标的最小值，即

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant 3} XA_{\cdot j} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i. \qquad (1.67)$$

图1.1中的粗折线表示这个最小值函数.

局中人1希望选择一个$X$，使上面这个最小值尽可能地大. 从图中可以看出来，他应当选择点$A'$所代表的$X$，这时最小值（1.67）为最大，即

$$A'B' = \max_{X \in S_2} \min_{1 \leqslant j \leqslant 3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i,$$

这就是对策的值.

在图1.1中，点$B'$就是$ad$和$cf$两条直线的交点.只要解两个二元一次联立方程，就可求出$A'$的坐标$x = x^*$和$A'B'$的值.由图也可看出，局中人2的最优策略不涉及他的纯策略$\boxed{2}$.因此，只要解$2 \times 2$矩阵对策

$$\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix},$$

就能得出局中人2的最优策略. $2 \times 2$矩阵对策的解将在下节讨论.

这种图解法可以推广应用到一切$2 \times n$的矩阵对策.

在特殊情形，得到的解可以是$x$轴上[0,1]的一个子区间，也可以是[0,1]的一个端点.后者对应于局中人1的一个纯策略解.前者则是图1.1中的粗折线含有一段水平线段的情形.

下面再来讨论$m \times 2$矩阵对策的图解法.我们也以$m = 3$的情形来加以说明.

设$3 \times 2$矩阵对策的支付矩阵$A$为

$$
\begin{array}{cc}
y & 1-y \\
\boxed{1} & \boxed{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.
$$

设局中人2采用混合策略$Y=(y,1-y)$，$0\leqslant y\leqslant 1$. $y=1$代表纯策略$\boxed{1}$，$y=0$代表纯策略$\boxed{2}$.

图1.2中粗折线的纵坐标是

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} A_i.Y' = \max_{1\leqslant i\leqslant 3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}y_j.$$

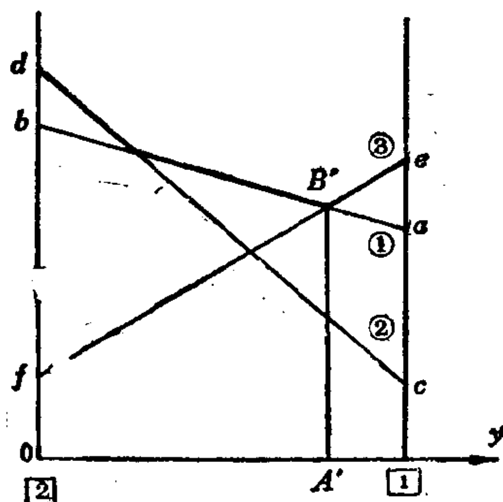



图 1.2

局中人2希望选择使这个最大值尽可能小的$Y$.在图上就是点$A'$所代表的$Y$.这时

$$A'B' = \min_{Y\in S_2}\ \max_{1\leqslant i\leqslant 3} A_i.Y'.$$

这就是对策的值.

## 1.11. 2×2矩阵对策的解

设2×2矩阵对策的支付矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

如果对策有鞍点，立即得到纯策略解.

在没有鞍点的情况下，通过两行互换或两列互换，也就是通过局中人 1 或 2 的两个策略的编号的互换，我们不难发现，只须考虑以下的情形：

$$a<b, \quad a<c, \quad d<b, \quad d<c.$$

这时，对策必有混合策略解.

设$X^*=(x^*,1-x^*)$，$Y^*=(y^*,1-y^*)$分别是局中人 1 和 2 的最优混合策略，其中

$$0<x^*<1, \quad 0<y^*<1. \tag{1.69}$$

根据1.8节的定理1.6，因为

$$x^*>0, \quad 1-x^*>0, \quad y^*>0, \quad 1-y^*>0,$$

所以，如果以$v$表示对策的值，必有

$$X^*A_{\cdot 1}=v,$$
$$X^*A_{\cdot 2}=v,$$
$$A_{1\cdot}Y^{*\prime}=v,$$
$$A_{2\cdot}Y^{*\prime}=v.$$

把这四个方程用矩阵的元素写出来，就是

$$ax^*+c(1-x^*)=v,$$
$$bx^*+d(1-x^*)=v,$$
$$ay^*+b(1-y^*)=v,$$
$$cy^*+d(1-y^*)=v.$$

由前两式可得

$$x^*=\frac{d-c}{a+d-b-c}, \tag{1.70}$$

由后两式可得

$$y^*=\frac{d-b}{a+d-b-c}. \tag{1.71}$$

然后就可求得

$$v=\frac{ad-bc}{a+d-b-c}. \tag{1.72}$$

(1.70)，(1.71) 和 (1.72) 就是对策 (1.68) 当它不存在鞍点时的最优策略和值.

这些公式对于

$$a>b,\quad a>c,\quad d>b,\quad d>c$$

的情形同样适用.

对于没有鞍点的 2 × 2 矩阵对策，在[28]中讲到一种非常有趣并且很容易记忆的解法，我们现在来加以介绍.例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

首先从第 1 列的元素减去第 2 列的对应元素，得到

$$\left.\begin{matrix}1-4\\ 3-(-2)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}-3\\ 5\end{matrix}\right..$$

然后，将得到的两个数取绝对值并互换位置：

$$\left.\begin{matrix}-3\\ 5\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}5\\ 3\end{matrix}\right..$$

5 和 3 之比就是局中人 1 的最优策略

$$X^*=(x_1,x_2)=(x^*,1-x^*)$$

中$x_1$和$x_2$之比.于是我们得到

$$X^*=\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right).$$

再从第 1 行的元素减去第 2 行的对应元素，得到

$$\underbrace{1-3\qquad\qquad 4-(-2)}_{\displaystyle\|}$$
$$\overbrace{-2\qquad\qquad\qquad 6}$$

然后，将这两个数取绝对值并互换位置：

$$\underbrace{-2 \quad 6}$$
$$\downarrow$$
$$\overbrace{6 \quad 2}$$

6 与 2 之比就是局中人 2 的最优策略

$$Y^* = (y_1, y_2) = (y^*, 1 - y^*)$$

中 $y_1$ 与 $y_2$ 之比．我们得到

$$Y^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

容易算出，对策的值是

$$v = X^* A Y^{*t} = \frac{7}{4}.$$

利用公式（1.70），（1.71），（1.72）计算，结果完全相同．

## 1.12. 3×3 矩阵对策的解

我们现在用**重心坐标**来表示单纯形 $S_3$ 中的点 $X = (x_1, x_2, x_3)$，这里

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \tag{1.73}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{1.74}$$

在一个等边三角形123中，设中垂线长为 1，并设这个三角形中每一个点 $X$ 到 1，2，3 三个顶点的对边的距离分别为 $x_1$，$x_2$，$x_3$，则 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 满足（1.73）和（1.74）；参看图1.3.因此，就以（$x_1$，$x_2$，$x_3$）作为 $X$ 的坐标，称为重心坐标．

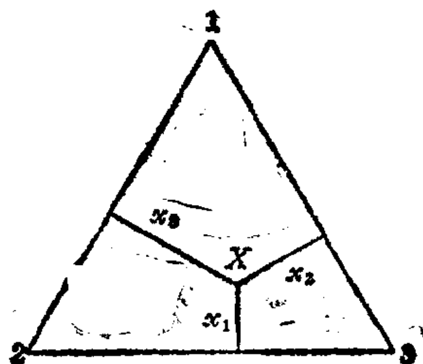


图 1.3

顶点 1 的重心坐标是(1,0,0)．同样，顶点2,3的重心坐标分别是(0,1,0)和(0,0,1)．闭三角形中全部点的集合就是 $S_3$．又，三角形的三条边23,31,12的方程分别是

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

设3×3矩阵对策的支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

对策的值是

$$v=\max_{X\in S_3}\ \min_{1\leqslant j\leqslant 3} XA_{\cdot j}=\max_{X\in S_3}\ \min\begin{Bmatrix} XA_{\cdot 1} \\ XA_{\cdot 2} \\ XA_{\cdot 3} \end{Bmatrix}. \qquad (1.75)$$

考虑等式

$$XA_{\cdot 1}=XA_{\cdot 2}, \qquad (1.76)$$

$$XA_{\cdot 2}=XA_{\cdot 3}, \qquad (1.77)$$

$$XA_{\cdot 3}=XA_{\cdot 1}. \qquad (1.78)$$

每一个等式代表一条直线，它将整个平面分成两个半平面（可以把三角形以外的点看做是满足条件（1.74）而$x_1,x_2,x_3$三数中有一个或两个取负值的点）.例如等式（1.76），它将整个平面分成两个半平面.一个半平面中的点$X$满足条件

$$XA_{\cdot 1}<XA_{\cdot 2},$$

另一个半平面中的点$X$满足条件

$$XA_{\cdot 1}>XA_{\cdot 2}.$$

对于等式（1.77）和(1.78),情况也一样.

(1.76),(1.77),(1.78)三条直线或交于一点，或互相平行，它们将整个平面分为$R_1,R_2,R_3$三个区域，见图1.4.在$R_1$中，

$$\min_{1\leqslant j\leqslant 3} XA_{\cdot j}=XA_{\cdot 1};$$

在$R_2$中，

$$\min_{1\leqslant j\leqslant 3} XA_{\cdot j}=XA_{\cdot 2};$$

在$R_3$中，

$$\min_{1\leqslant j\leqslant 3} XA_{\cdot j}=XA_{\cdot 3}.$$

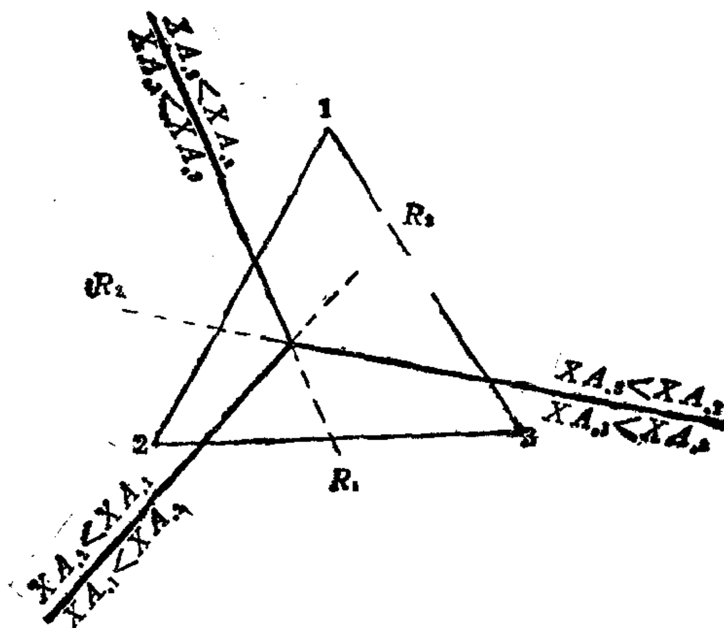



图 1.4

因此，(1.75)可以改写为

$$v=\max_{X\in S_3}\min_{1\leqslant j\leqslant 3}XA_{\cdot j}=\max\left\{\max_{X\in S_3\cap R_1}XA_{\cdot 1},\ \max_{X\in S_3\cap R_2}XA_{\cdot 2},\ \max_{X\in S_3\cap R_3}XA_{\cdot 3}\right\}. \tag{1.79}$$

我们应当先计算

$$\max_{X\in S_3\cap R_j}XA_{\cdot j},\quad j=1,2,3, \tag{1.80}$$

然后把算出的值进行比较，取其最大者，即为$v$.

由于$S_3\cap R_j$($j=1,2,3$)是凸多边形（在特殊情况可以是一个直线段，或一个点，或空集），一次函数$XA_{\cdot j}$在凸多边形域上只可能在顶点处取得其最大值，因此，只须计算$XA_{\cdot j}$在有关的顶点处的值，进行比较，其最大者就是$v$.在比较的过程中，同时也就求得了局中人1的最优策略.

求得对策的值$v$以后，就不难用类似的方法计算局中人2的最优策略$Y$.我们有

$$v=\min_{Y\in S_3}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}A_{i\cdot}Y^{t}$$

$$= \min_{Y \in S_3} \max \begin{Bmatrix} A_1 . Y' \\ A_2 . Y' \\ A_3 . Y' \end{Bmatrix}$$

$$= \min\left\{ \min_{Y \in S_3 \cap T_1} A_1 . Y', \min_{Y \in S_3 \cap T_2} A_2 . Y', \right.$$

$$\left. \min_{Y \in S_3 \cap T_3} A_3 . Y' \right\},$$

其中$T_1$,$T_2$,$T_3$分别是使得一次函数$A_1.Y'$,$A_2.Y'$,$A_3.Y'$在三者中为最大的区域.只须计算$A_i.Y'$在有关的顶点处的值，进行比较,其最小者必为 $v$.而取得最小值 $v$ 的点$Y$就是局中人2的最优策略.

例7. 我们来计算1.9节例6中对策的值和最优策略.支付矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

为了计算简便，对矩阵$B$的每个元素加上一个常数$-3$,得到

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在来解矩阵对策$A$.我们有

$$XA._1 = x_2,$$
$$XA._2 = 2x_1 - 6x_2 - x_3,$$
$$XA._3 = -x_2.$$

直线$XA._1 = XA._2$的方程是

$$2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0，或 \ 3x_1 - 6x_2 = 1;$$

直线$XA._2 = XA._3$的方程是

$$2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0，或 \ 3x_1 - 4x_2 = 1;$$

直线$XA._3 = XA._1$的方程是

$$x_2 = 0.$$

在图1.5中画出了 $\min\limits_{1 \leq j \leq 3} XA._j$分别等于$XA._1$,$XA._2$和$XA._3$

的三个区域$R_1,R_2,R_3$.

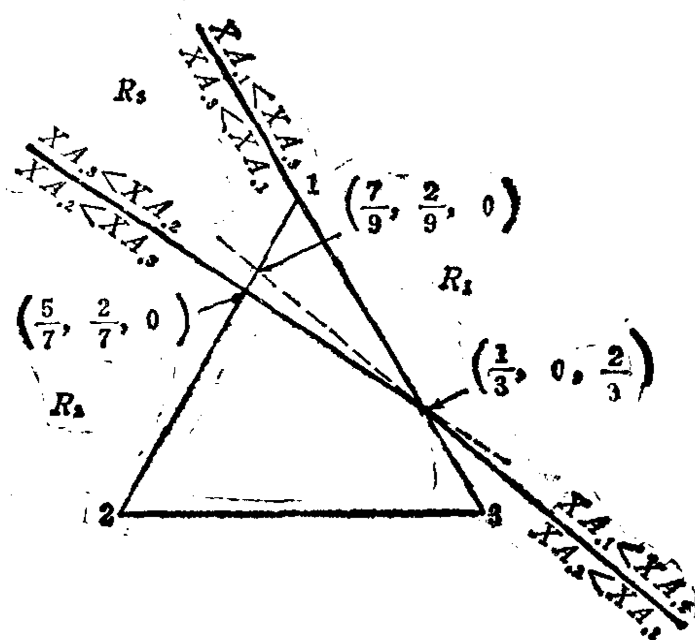



图 1.5

计算$XA_{.1}$在$(1,0,0)$和$\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$处的值：

$$(1,0,0)(0,1,0)'=0,$$

$$\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)(0,1,0)'=0.$$

再计算$XA_{.2}$在$\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7},0\right)$,$(0,1,0)$,$(0,0,1)$处的值：

$$\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7},0\right)(2,-6,-1)'=-\frac{2}{7},$$

$$(0,1,0)(2,-6,-1)'=-6,$$

$$(0,0,1)(2,-6,-1)'=-1.$$

比较以上五个等式，我们得到矩阵对策$A$的值是

$$v_A=0, \qquad (1.81)$$

局中人 1 的最优策略是

$$X_1^*=(1,0,0), \quad X_2^*=\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right). \qquad (1.82)$$

以下再来计算局中人 2 的最优策略.我们有

$$A_1.Y' = 2y_2,$$
$$A_2.Y' = y_1 - 6y_2 - y_3,$$
$$A_3.Y' = -y_2.$$

直线$A_1.Y' = A_2.Y'$的方程是

$$y_1 - 8y_2 - y_3 = 0, \quad 或 \quad 2y_1 - 7y_2 = 1;$$

直线$A_2.Y' = A_3.Y'$的方程是

$$y_1 - 5y_2 - y_3 = 0, \quad 或 \quad 2y_1 - 4y_2 = 1;$$

直线$A_3.Y' = A_1.Y'$的方程是

$$y_2 = 0.$$

在图1.6中画出了 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} A_i.Y'$分别等于$A_1.Y'$,$A_2.Y'$和$A_3.Y'$的三个区域$T_1,T_2,T_3$.

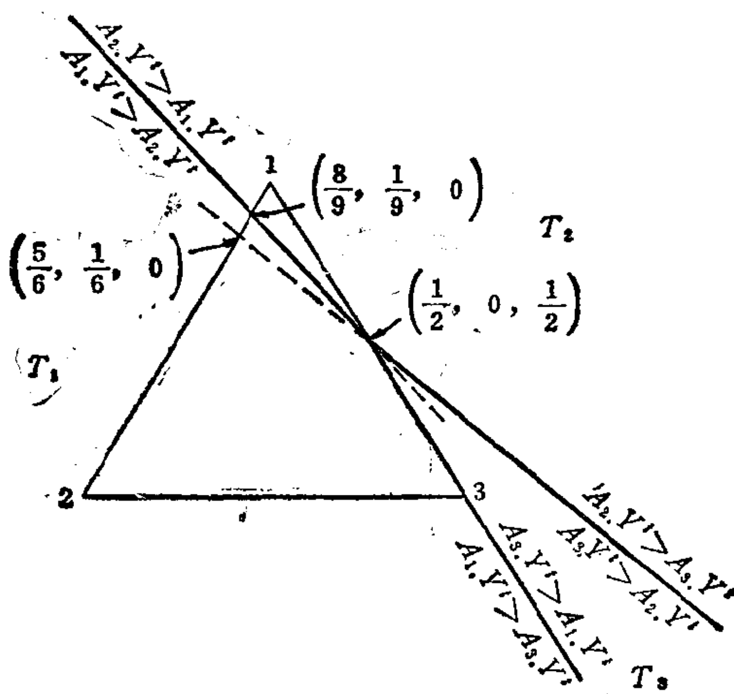



图 1.6

计算$A_1.Y'$在$(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$处的值:

$$(0,2,0)(0,1,0)' = 2,$$
$$(0,2,0)(0,0,1)' = 0,$$

$$(0,2,0)\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)'=0,$$

$$(0,2,0)\left(\frac{8}{9},\frac{1}{9},0\right)'=\frac{2}{9}.$$

再计算$A_{2}.Y'$在(1,0,0)处的值：

$$(1,-6,-1)(1,0,0)'=1.$$

比较以上五个等式，我们得到局中人2的最优策略是

$$Y_1^*=(0,0,1),\quad Y_2^*=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right). \qquad (1.83)$$

回到原来的矩阵对策$B$，根据（1.81），(1.82)，(1.83)，我们得到对策$B$的值是

$$v_B=3;$$

局中人1的全体最优策略是$\lambda X_1^*+(1-\lambda)X_2^*$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，即

$$\lambda(1,0,0)+(1-\lambda)\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right),\ 0\leqslant\lambda\leqslant1.$$

局中人2的全体最优策略是 $\mu Y_1^*+(1-\mu)Y_2^*$，$0\leqslant\mu\leqslant1$，即

$$\mu(0,0,1)+(1-\mu)\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ 0\leqslant\mu\leqslant1.$$

# 第二章　连续对策

## 2.1.　零和二人无限对策

矩阵对策最简单的推广，就是把每个局中人的策略集从一个有限集换成一个无限集，例如换成一个区间[0,1]中的全体实数.

局中人1从区间[0,1]中选择一个数$x$,局中人2完全独立地从区间[0,1]中选择一个数$y$.$x$和$y$称为局中人1和2的纯策略.选定$x$，$y$后，就确定了对策的一个局，其结果用一个支付函数$P(x,y)$来表示.局中人1得到支付$P(x,y)$，局中人2得到支付$-P(x,y)$，或者说，局中人2付给局中人1 $P(x,y)$.

这种对策称为**无限对策**.由于局中人1，2得到的支付之和恒为零，所以这种无限对策也是零和二人对策.

例如，局中人1，2互相独立地从[0,1]中分别选择一个实数$x,y$,支付函数是

$$P(x,y)=(x-y)^2.$$

这样确定的对策就是定义在正方形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上的一个零和二人无限对策.

对于局中人1选定的一个固定的$x\in[0,1]$,他至少可以得到支付

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y). \tag{2.1}$$

局中人1希望支付越大越好,因此,他将选择$x\in[0,1]$使得上面这个最小值为最大，即

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y). \tag{2.2}$$

不论局中人2采用什么策略，局中人1至少可以得到支付(2.2).

同样，对于局中人 2 选定的一个固定的$y\in[0,1]$，他最多付出

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y).$$

局中人 2 希望支付越小越好，因此，他将选择$y\in[0,1]$使得上面这个最大值为最小，即

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y). \qquad (2.3)$$

不论局中人 1 采用什么策略，局中人 2 最多付出（2.3）.或者说，局中人 1 得到的支付不会超过(2.3).

同矩阵对策的情况一样，下面的不等式必定成立：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y)\leqslant \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y). \qquad (2.4)$$

证明的方法也完全类似.

如果

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y) = \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y), \qquad (2.5)$$

则存在点$(x^*,y^*)\in[0,1]\times[0,1]$，使得不等式

$$P(x,y^*)\leqslant P(x^*,y^*)\leqslant P(x^*,y) \qquad (2.6)$$

对于一切$x\in[0,1]$和一切$y\in[0,1]$成立.

这时，称$(x^*,y^*)$是支付函数$P(x,y)$或对策的一个鞍点，$P(x,y)$在鞍点处的值

$$v=P(x^*,y^*) \qquad (2.7)$$

称为对策的值.我们有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y) = P(x^*,y^*) = v$$

$$= \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y),$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y^*) = P(x^* y^*) = \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x^*,y). \qquad (2.8)$$

## 2.2. 混合策略

现在，如果（2.5）式不成立，则(2.4)式中的“小于”号成

立，即

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y) < \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x,y). \tag{2.9}$$

这时，我们就要像矩阵对策的情形一样，引进混合策略的概念．局中人1的一个**混合策略**就是定义在[0,1]上的一个**分布函数**$F(x)$：对于每一个$x\in[0,1]$，$F(x)$是用某种随机的方法选出的数小于或等于$x$的概率，也就是随机变量的值小于或等于$x$的概率：

$$F(x)=pr\{\xi\leqslant x\}. \tag{2.10}$$

当$x=0$时，定义$F(0)=0$，即

$$F(0)=pr\{\xi<0\}=0. \tag{2.11}$$

由定义有

$$F(b)-F(a)=pr\{a<\xi\leqslant b\}, \tag{2.12}$$

$$F(b)-F(0)=pr\{0\leqslant\xi\leqslant b\}. \tag{2.13}$$

每一个由(2.10)和(2.11)定义的分布函数$F(x)$，或称为**累积分布函数**，必具有以下几个性质：

(1) $F(x)$非负，即

$$F(x)\geqslant 0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

(2) $F(0)=0$， $F(1)=1$.

(3) $F(x)$是$x$的非减函数，即，当$x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1<x_2$时，

$$F(x_1)\leqslant F(x_2).$$

(4) $F(x)$在(0,1)内右连续，即

$$F(x_0+0)=F(x_0),\quad 0<x_0<1.$$

最后一个性质的证明如下：设$x_0\in(0,1)$，$\delta>0$，则由分布函数的定义有

$$F(x_0+\delta)-F(x_0)=pr\{x_0<\xi\leqslant x_0+\delta\}.$$

当$\delta\to 0$时，满足$x_0<x\leqslant x_0+\delta$的点$x$的集趋于空集为其极限．因此，

$$pr\{x_0<\xi\leqslant x_0+\delta\}\to 0,$$

从而

$$F(x_0+\delta)\to F(x_0).$$

这就证明了$F(x)$在$(0,1)$内任何一点处是右连续的.

上面说明了每一个分布函数$F(x)$具有(1)至(4)四个性质.反之，根据分布函数的理论，满足(1)至(4)四个条件的每一个函数$F(x)$是一个分布函数.

我们回到无限对策的混合策略.

当对策的支付函数$P(x,y)$满足不等式(2.9)时，局中人1，2分别按分布函数$F(x)$，$G(y)$在区间$[0,1]$中选择策略. $F(x)$，$G(y)$就是局中人1，2的混合策略.

如果局中人1采用纯策略$x$，局中人2采用混合策略$G(y)$，则局中人1得到的支付的期望值是

$$\int_0^1 P(x,y)dG(y),$$

这里的积分是斯蒂尔杰积分.

同样，如果局中人2采用纯策略$y$，局中人1采用混合策略$F(x)$，则局中人1的期望支付是

$$\int_0^1 P(x,y)dF(x).$$

如果局中人1，2分别采用混合策略$F(x)$，$G(y)$，则局中人1的期望支付是

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 P(x,y)dF(x)dG(y). \qquad (2.14)$$

局中人1希望这个期望支付越大越好. 如果他选用某个混合策略(即分布函数)$F(x)$，他的期望支付至少是

$$\min_G \quad E(F,G).$$

局中人1可以选择$F(x)$使上式为最大.这就是说，他可以保证期

望支付不小于

$$v_1 = \max_F \min_G E(F,G). \qquad (2.15)$$

以上的最小值和最大值都是在全体分布函数的集上取的.

同样，局中人2可以使局中人1最多得到期望支付

$$v_2 = \min_G \max_F E(F,G). \qquad (2.16)$$

我们假定$v_1$，$v_2$都存在.

容易证明，

$$v_1 = \max_F \min_G E(F,G) \leqslant \min_G \max_F E(F,G) = v_2. \qquad (2.17)$$

证明与1.4节中的定理1.2的证明相类似.

## 2.3. 连续对策

在一般情形，(2.17)中的等号不一定成立. 我们现在不加证明地叙述下列关于无限对策的基本定理. 证明可参看[16]或[25].

**定理2.1.** 设无限对策的支付函数$P(x,y)$是定义在$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$上的连续函数，则

$$v_1 = \max_F \min_G \int_0^1 \int_0^1 P(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

和

$$v_2 = \min_G \max_F \int_0^1 \int_0^1 P(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

存在且相等.

我们称支付函数是连续函数的无限对策为**连续对策**. 在本章的余下部分中，除特别注明者外，我们要讨论的都是连续对策.

当$v_1 = v_2$时，我们称它们的公共值$v = v_1 = v_2$为对策的**值**，也就是局中人1应得到的期望支付. 这时存在局中人1和2的最优混合策略$F^*(x)$，$G^*(y)$，使得不等式

$$E(F,G^*)\leqslant E(F^*,G^*)\leqslant E(F^*,G) \tag{2.18}$$

对于一切分布函数$F$和$G$成立．同矩阵对策的情形一样，$(F^*,G^*)$称为$E(F,G)$或连续对策的一个鞍点，或称为对策的一个解．

## 2.4. 最优策略的性质

首先，我们证明连续函数关于分布函数积分的一个性质．

**定理2.2.** 设$f(x)$，$g(y)$是$[0,1]$上的连续函数，$F(x)$，$G(y)$是分布函数，则

$$\max_F\int_0^1 f(x)dF(x)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x), \tag{2.19}$$

$$\min_G\int_0^1 g(y)dG(y)=\min_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y), \tag{2.20}$$

**证明.** 设

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(a), \tag{2.21}$$

则

$$f(a)\geqslant f(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

对于每一个分布函数$F(x)$，有

$$f(a)=\int_0^1 f(a)dF(x)\geqslant\int_0^1 f(x)dF(x).$$

因此，

$$f(a)\geqslant\sup_F\int_0^1 f(x)dF(x). \tag{2.22}$$

现在考虑一个特殊的分布函数，即阶梯函数

$$I_a(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<a,\\ 1, & a\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

我们有

$$\sup_F\int_0^1 f(x)dF(x)\geqslant\int_0^1 f(x)dI_a(x). \tag{2.23}$$

容易验证，

$$\int_0^1 f(x)dI_a(x)=f(a). \tag{2.24}$$

由(2.22)，(2.23)，(2.24)得到

$$\sup_F \int_0^1 f(x)dF(x) = \int_0^1 f(x)dI_a(x) = f(a). \qquad (2.25)$$

这就是说，当$F(x)=I_a(x)$时，$\int_0^1 f(x)dF(x)$达到它关于$F$的上确界，且其值为$f(a)$，即

$$\sup_F \int_0^1 f(x)dF(x) = \max_F \int_0^1 f(x)dF(x). \qquad (2.26)$$

由(2.26)，(2.25)，(2.21)即得

$$\max_F \int_0^1 f(x)dF(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x).$$

同样可证

$$\min_G \int_0^1 g(y)dG(y) = \min_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y). \qquad \blacksquare$$

这个定理说明，连续函数关于混合策略的最小(大)值与函数本身的最小(大)值相等．它是第一章1.6节中(1.27)，(1.28)式的推广．

利用定理 2.2，可将定理 2.1 改写成另外一种形式．

因为

$$\max_F \int_0^1 f(x)dF(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x),$$

所以

$$\max_F \int_0^1 \left[\int_0^1 P(x,y)dG(y)\right]dF(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 P(x,y)dG(y), \qquad (2.27)$$

因而

$$\min_G \max_F \int_0^1 \int_0^1 P(x,y)dG(y)dF(x) = \min_G \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 P(x,y)dG(y)$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dG^*(y). \qquad (2.28)$$

同理

$$\max_F \min_G \int_0^1\int_0^1 P(x,y)dF(x)dG(y)$$

$$= \max_F \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dF(x)$$

$$= \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dF^*(x). \qquad (2.29)$$

因此，我们可以把关于连续对策的基本定理即定理2.1改写成下列形式：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dG^*(y) = E(F^*,G^*)$$

$$= \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dF^*(x), \qquad (2.30)$$

其中$F^*(x)$，$G^*(y)$分别是局中人1，2的最优混合策略.

下面是对应于第一章矩阵对策中定理1.6的关于连续对策的定理.

**定理2.3.** 设$P(x,y)$是正方形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续对策的支付函数；$F(x)$，$G(y)$分别是局中人1，2的混合策略；$v$是对策的值.

（1）设$G^*(y)$是局中人2的一个最优策略．如果对于某一个$x_0\in[0, 1]$有

$$\int_0^1 P(x_0,y)dG^*(y) < v,$$

则

$$pr\{\xi = x_0\} = 0.$$

（2）设$F^*(x)$是局中人1的一个最优策略．如果对于某一个$y_0\in[0,1]$有

$$\int_0^1 P(x,y_0)dF^*(x) > v,$$

则

$$pr\{\eta = y_0\} = 0.$$

**证明.** 我们只证明（1）.

因为$G^*(y)$是局中人 2 的最优策略，所以

$$\int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \leqslant v.$$

令

$$S_1 = \left\{ x : \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) < v \right\},$$

$$S_2 = \left\{ x : \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) = v \right\}.$$

设$F^*(x)$是局中人 1 的一个最优策略，则

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x) \\ &= \int_{S_1} \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x) \\ &\quad + \int_{S_2} \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x) \\ &= \int_{S_1} \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x) \\ &\quad + v \int_{S_2} dF^*(x). \end{aligned}$$

由此有

$$v\left[ 1 - \int_{S_2} dF^*(x) \right] = \int_{S_1} \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x),$$

或

$$v \int_{S_1} dF^*(x) = \int_{S_1} \left[ \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x),$$

或

$$\int_{S_1} \left[ v - \int_0^1 P(x,y)dG^*(y) \right] dF^*(x) = 0.$$

当 $x = x_0 \in S_1$时，

$$v-\int_0^1 P(x,y)dG^*(y)>0.$$

上面最后一个等式中左边积分的对应于$x_0$的部分为

$$\left[\ v-\int_0^1 P(x,y)dG^*(y)\right]\left[F^*(x_0)-F^*(x_0-0)\right]=0.$$

因此，

$$pr\{\xi=x_0\}=F^*(x_0)-F^*(x_0-0)=0. \qquad ■$$

对应于定理1.7，连续对策有下列定理.

**定理2.4.** 设$P(x,y)$是正方形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续对策的支付函数；$F(x)$，$G(y)$分别是局中人1，2的混合策略；$v$是对策的值.

（1）分布函数$F^*(x)$是局中人1的最优策略的充要条件是

$$v\leqslant\int_0^1 P(x,y)dF^*(x), \qquad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

（2）分布函数$G^*(y)$是局中人2的最优策略的充要条件是

$$\int_0^1 P(x,y)dG^*(y)\leqslant v, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

**证明.** 我们只证明（1）.

**必要性.** 由(2.30)，

$$v=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)dF^*(x).$$

因此，

$$v\leqslant\int_0^1 P(x,y)dF^*(x), \qquad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

**充分性.** 假定

$$v\leqslant\int_0^1 P(x,y)dF^*(x), \qquad 0\leqslant y\leqslant 1. \tag{2.31}$$

设$(F^\circ,G^\circ)$是对策的一个鞍点，即

$$E(F,G^\circ)\leqslant E(F^\circ,G^\circ)\leqslant E(F^\circ,G) \tag{2.32}$$

对于一切分布函数$F$和$G$成立.

我们要证明，$(F^*,G^\circ)$是对策的一个鞍点.

(2.31)式两端对任意分布函数$G(y)$积分，得到

$$\int_0^1 v dG(y) = v \leqslant E(F^*, G). \tag{2.33}$$

特别有

$$v \leqslant E(F^*, G^\circ). \tag{2.34}$$

由鞍点的定义(2.32)知，

$$E(F^*, G^\circ) \leqslant E(F^\circ, G^\circ) = v. \tag{2.35}$$

由(2.34)和(2.35)有

$$E(F^*, G^\circ) = E(F^\circ, G^\circ) = v. \tag{2.36}$$

结合(2.32)，(2.36)和(2.33)，即得

$$E(F, G^\circ) \leqslant E(F^*, G^\circ) \leqslant E(F^*, G),$$

这就证明了$(F^*, G^\circ)$是对策的一个鞍点.因此，$F^*(x)$是局中人1的一个最优策略. ■

**例1.** 设连续对策的支付函数是

$$P(x, y) = (x - y)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

在这个对策中，对策的值是$\frac{1}{4}$. 局中人2的最优策略是一个纯策略$y = \frac{1}{2}$. 局中人1的最优策略是以相等的概率选择$x = 0$和$x = 1$. 即

$$G^*(y) = I_{\frac{1}{2}}(y),$$

$$F^*(x) = \frac{1}{2} I_0(x) + \frac{1}{2} I_1(x).$$

下面我们来验证这些事实. （参看后面的2.5节. ）

首先，我们有

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 P(x, y) dG^*(y) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 (x - y)^2 dI_{\frac{1}{2}}(y)$$

$$= \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

其次，

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 P(x,y)\,dF^*(x)$$

$$=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 (x-y)^2 d\left[\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)\right]$$

$$=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\left[\frac{1}{2}(0-y)^2+\frac{1}{2}(1-y)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}.$$

我们得到

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 (x-y)^2 dG^*(y)=\frac{1}{4}=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 (x-y)^2 dF^*(x).$$

因此，根据(2.30)式，

$$G^*(y)=I_{\frac{1}{2}}(y)$$

和

$$F^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$$

分别是局中人 1 和 2 的最优策略，且$v=\frac{1}{4}$是对策的值．

## 2.5. 凸 对 策

单位正方形上连续对策的支付函数如果对于其中一个变量来说是个凸函数，这种对策叫做凸对策，或者叫做具凸支付函数的对策．

首先介绍凸函数的定义．

**定义．** 设$f(y)$是定义在$[0,1]$上的函数．如果对于每一对$y_1$，$y_2\in[0,1]$和每一个$\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

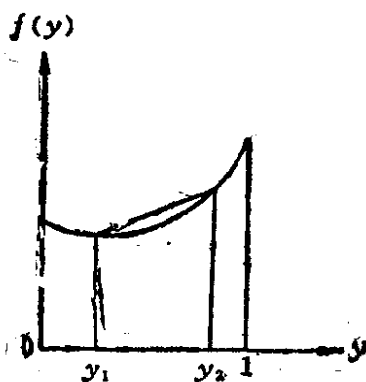


图 2.1

$$f(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda f(y_1)$$

$$+(1-\lambda)f(y_2),\qquad(2.37)$$

则称$f(y)$是区间[0，1]上的凸函数.

如果当$0<\lambda<1$时(2.37)式中恒成立严格不等号，则称$f(y)$是严格凸函数.

严格凸函数的几何意义是这样的：连接函数图形上任意两点所成的弦，永远位于函数图形的上方．见图2.1.

设单位正方形上连续对策的支付函数是$P(x,y)$．以下我们假定，对于每一个$x$，$P(x,y)$是$y$的严格凸函数．我们将在本节中确定这一类连续对策的解.

**引理**．设函数$P(x,y)$在单位正方形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上对于$x$和$y$都连续．如果对于每一个$x\in[0,1]$，$P(x,y)$是$y$的严格凸函数，则由积分所定义的函数

$$\phi(y)=\int_0^1 P(x,y)\,dF(x)$$

是$y$的连续函数，并且也是$y$的严格凸函数．式中$F(x)$是任意分布函数.

**证明**．先证$\phi(y)$的连续性.

因为$P(x,y)$关于$y$连续，对于任意$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当$|y_1-y_2|<\delta$时有

$$|P(x,y_1)-P(x,y_2)|<\varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\phi(y_1)-\phi(y_2)\right|&=\left|\int_0^1 P(x,y_1)\,dF(x)-\int_0^1 P(x,y_2)\,dF(x)\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|P(x,y_1)-P(x,y_2)\right|dF(x)\\&<\varepsilon\int_0^1 dF(x)=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了$\phi(y)$的连续性.

下面证明$\phi(y)$是$y$的严格凸函数.

设$0<\lambda<1$，则

$$\phi(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\int_0^1 P(x,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)dF(x)$$
$$<\int_0^1\left[\lambda P(x,y_1)+(1-\lambda)P(x,y_2)\right]dF(x)$$
$$=\lambda\int_0^1 P(x,y_1)dF(x)+(1-\lambda)\int_0^1 P(x,y_2)dF(x)$$
$$=\lambda\phi(y_1)+(1-\lambda)\phi(y_2).$$

这就证明了$\phi(y)$是$y$的严格凸函数. ∎

下面我们讨论凸对策的解.

**定理2.5.** 设单位正方形上连续对策的支付函数是$P(x,y)$，并设$P(x,y)$对于每一个$x$是$y$的严格凸函数. 则局中人2的最优策略是一个纯策略，并且这个纯策略是局中人2的唯一的最优策略.

**证明.** 由2.3节中的定理2.1可知，对策必有解. 设$F^*(x)$是局中人1的一个最优策略，$G^*(y)$是局中人2的一个最优策略，$v$是对策的值，则由(2.30)式有

$$v=\int_0^1\int_0^1 P(x,y)dF^*(x)dG^*(y)$$
$$=\min_{0\leq y\leq 1}\int_0^1 P(x,y)dF^*(x). \tag{2.38}$$

根据本节的引理，

$$\int_0^1 P(x,y)dF^*(x) \tag{2.39}$$

在区间[0，1]上是$y$的严格凸函数. 因此，它在区间[0，1]中唯一的一点处取得最小值$v$；假定这一点是$y^*$.

由此可知，$y^*$是局中人2的最优纯策略，它是使得(2.39)为最小的$y$. 对于这个$y^*$，

$$pr\{\eta=y^*\}>0.$$

根据上节的定理2.3的（2），必有

$$\min_{0\leq y\leq 1}\int_0^1 P(x,y)dF^*(x)=\int_0^1 P(x,y^*)dF^*(x)=v.$$

而对于所有其他的$y\in[0，1]$，有

$$\int_0^1 P(x,y)dF^*(x) > v,$$

这时必有

$$pr\{\eta = y\} = 0$$

（仍根据定理2.3）．因此，$y^*$即$I_{y^*}(y)$是局中人 2 的唯一最优策略．■

利用这个定理，可以求出凸对策的值$v$和局中人 2 的最优策略$y^*$．我们有

$$v = \min_G \max_F \int_0^1 \left[\int_0^1 P(x,y)\,dG(y)\right] dF(x).$$

根据上节的(2.27)，将上式改写为

$$v = \min_G \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 P(x,y)\,dG(y).$$

已知局中人 2 有一个最优纯策略，所以

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 P(x,y)\,dI_y(y)$$
$$= \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,y) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,y^*).$$

我们得到

**定理2.6.** 在定理2.5的假设条件下，凸对策的值是

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,y). \tag{2.40}$$

由以上的讨论可知，凸对策中局中人 2 有唯一的一个最优策略，这个最优策略是一个纯策略$y^*$，它满足

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,y) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,y^*). \tag{2.41}$$

现在我们考虑局中人 1 的最优策略．分三种情形．

（1）$y^* = 0$．由（2.41），

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x,0) = v. \tag{2.42}$$

因此，对于每一个$x \in [0, 1]$，有

$$P(x,0) \leqslant v.$$

设

$$S_0 = \{x_0: \quad P(x_0, 0) = v\},$$
$$S_1 = \{x_1: \quad P(x_1, 0) < v\}.$$

我们有$S_0 \cup S_1 = [0, 1]$. 以下我们证明，存在局中人1的一个最优纯策略. 根据2.1节的(2.8)式，这就是说，存在 $x_0 \in S_0$，使得

$$\min_{0 \leq y \leq 1} P(x_0, y) = v = P(x_0, 0).$$

也就是说，$P(x_0, y)$在$y = 0$处非减.

因若不然，设对于每个$x_0 \in S_0$，$P(x_0, y)$在$y = 0$处单调递减，则在$y = 0$的一邻域内有小于$P(x_0, 0)$的$P(x_0, y)$值. 这就是说，对于每一个$x_0 \in S_0$，存在$\delta > 0$，当$0 < y < \delta$时，有

$$P(x_0, y) < P(x_0, 0) = v. \qquad (2.43)$$

又因$P(x_1, y)$在$y = 0$处连续，因此，对于每一个$x_1 \in S_1$，存在$\delta > 0$，当$0 < y < \delta$时，有

$$P(x_1, y) < v. \qquad (2.44)$$

把(2.43)和(2.44)合在一起，我们得到：对于每一个$x \in [0, 1]$，存在$\delta > 0$，当$0 < y < \delta$时，有

$$P(x, y) < v. \qquad (2.45)$$

对于每一个$x$，定义$\delta(x)$为使得(2.45)成立的一切$\delta$的上确界. 根据$P$的连续性，$\delta(x)$是定义在闭区间$[0, 1]$上$x$的连续函数. 又因$\delta(x)$恒为正数，所以其最小值也为正数；设此最小值为$\delta_0 > 0$.

设$y_1$满足$0 < y_1 < \delta_0$，则

$$\max_{0 \leq x \leq 1} P(x, y_1) < v.$$

由(2.40)有

$$v = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} P(x, y) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} P(x, y_1) < v,$$

而这是不可能的.

因此，存在$x_0 \in S_0$，使得$P(x_0, 0) = v$，且$P(x_0, y)$在$y = 0$处

非减．如果$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)$存在，则上述结论就是：存在局中人1的最优纯策略$x^* \in [0, 1]$，满足下面两个条件：

$$\left.\begin{aligned} &P(x^*,0)=v, \\ &\frac{\partial}{\partial y}P(x^*,0)\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

这里$P$在$y=0$处关于$y$的偏导数应理解为右导数．

（2）$y^*=1$．根据类似的讨论可知，存在局中人1的最优策略$x^* \in [0, 1]$，满足下面两个条件：

$$\left.\begin{aligned} &P(x^*,1)=v, \\ &\frac{\partial}{\partial y}P(x^*,1)\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

这里的偏导数应理解为左导数．

（3）$0<y^*<1$．同情形（1）一样，对于每一个$x \in [0, 1]$，有

$$P(x,y^*)\leqslant v; \tag{2.48}$$

对于某个$x \in [0, 1]$，有

$$P(x,y^*)=v. \tag{2.49}$$

如果满足（2.49）的每一个$x$同时满足

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y^*)<0, \tag{2.50}$$

则将得到同情形（1）中相同的矛盾．因此，存在$x_1^* \in [0, 1]$使得

$$\left.\begin{aligned} &P(x_1^*,y^*)=v, \\ &\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

根据类似的论证可知，存在$x_2^* \in [0, 1]$使得

$$\left.\begin{aligned} &P(x_2^*,y^*)=v, \\ &\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*)\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

考虑函数

$$f(\lambda)=\lambda\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)+(1-\lambda)\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*).$$

这是λ的线性函数，并且

$$f(0)=\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*)\leqslant 0,$$

$$f(1)=\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)\geqslant 0.$$

因此,必定存在一个 $\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，使得$f(\alpha)=0$，也就是

$$f(\alpha)=\alpha\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)$$

$$+(1-\alpha)\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*)=0. \qquad (2.53)$$

现在证明，如果$x_1^*\in[0,1]$，$x_2^*\in[0,1]$和$\alpha\in[0,1]$是满足(2.51)，(2.52)，(2.53)的三个数，则分布函数

$$F^*(x)=\alpha I_{x_1^*}(x)+(1-\alpha)I_{x_2^*}(x)$$

是局中人1的最优策略.

首先，函数

$$g(y)=\alpha P(x_1^*,y)+(1-\alpha)P(x_2^*,y)$$

显然是$y$的严格凸函数．由(2.53)可知，$g(y)$的导数$g'(y)$在$y=y^*$处为0：

$$g'(y^*)=f(\alpha)=0.$$

因此，$g(y)$在$y^*$处取得最小值

$$g(y^*)=\alpha P(x_1^*,y^*)+(1-\alpha)P(x_2^*,y^*)$$
$$=\alpha v+(1-\alpha)v=v.$$

我们证明了对于一切$y\in[0,1]$有

$$v=g(y^*)\leqslant g(y)=\alpha P(x_1^*,y)+(1-\alpha)P(x_2^*,y).$$

即

$$v\leqslant\int_0^1 P(x,y)d[\alpha I_{x_1^*}(x)+(1-\alpha)I_{x_2^*}(x)].$$

根据上节定理2.4的（1），这就证明了分布函数

$$F^*(x)=\alpha I_{x_1^*}(x)+(1-\alpha)I_{x_2^*}(x)$$

是局中人1的最优策略.

现在把（1）至（3）三种情形归结成下面的定理.

**定理2.7.** 在定理2.5的条件下，凸对策局中人1的最优策略是$F^*(x)$：

（1）若$y^*=0$，则

$$F^*(x)=I_{x^*}(x), \tag{2.54}$$

其中$x^*\in[0，1]$满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}&P(x^*,0)=v,\\&\frac{\partial}{\partial y}P(x^*,0)\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

（2）若$y^*=1$，则

$$F^*(x)=I_{x^*}(x), \tag{2.56}$$

其中$x^*\in[0，1]$满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}&P(x^*,1)=v,\\&\frac{\partial}{\partial y}P(x^*,1)\leqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

（3）若$0<y^*<1$，则

$$F^*(x)=\alpha I_{x_1^*}(x)+(1-\alpha)I_{x_2^*}(x),\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{2.58}$$

其中$x_1^*\in[0，1]$，$x_2\in[0，1]$和$\alpha$满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}&P(x_1^*,y^*)=v,\\&\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)\geqslant 0,\\&P(x_2^*,y^*)=v,\\&\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*)\leqslant 0,\\&\alpha\frac{\partial}{\partial y}P(x_1^*,y^*)+(1-\alpha)\frac{\partial}{\partial y}P(x_2^*,y^*)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

应当注意的是，如果对策的支付函数$P(x,y)$是$y$的凸函数，

不是严格凸函数，则本节的定理仍成立，但局中人 2 的最优策略不再是唯一的了.

**例2.** 设正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$ 上连续对策的支付函数是

$$P(x, y) = (x - y)^2.$$

因为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y) = 2 > 0,$$

所以，对于每一个 $x \in [0, 1]$，$P(x, y)$ 是 $y$ 的严格凸函数.

设 $v$ 是对策的值. 由公式(2.40)，

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (x - y)^2$$

$$= \min \begin{cases} (1 - y)^2, & 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ (0 - y)^2, & \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

见图2.2. 图中粗曲线就是 $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} (x - y)^2$ 的图形. 容易看出，在区间 $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ 中，$(1 - y)^2$ 在 $y = \frac{1}{2}$ 处取得最小值 $\frac{1}{4}$；在区间 $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$ 中，$(0 - y)^2$ 也在 $y = \frac{1}{2}$ 处取得最小值 $\frac{1}{4}$. 因此，

$$v = \frac{1}{4} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left( x - \frac{1}{2} \right)^2.$$

局中人 2 的最优纯策略是

$$y^* = \frac{1}{2}.$$

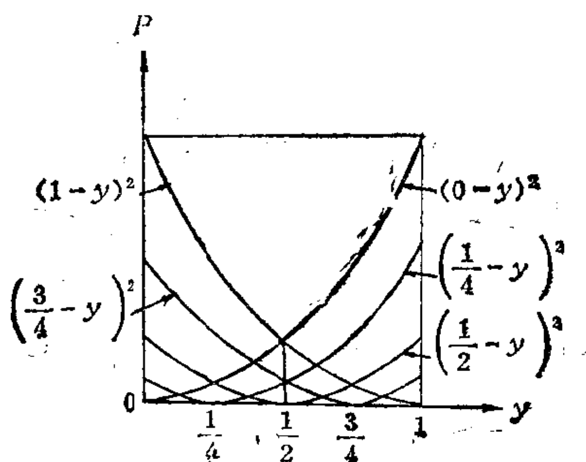



图 2.2

现在求局中人 1 的最优策略. 先解

$$P(x, y^*) = P\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = v,$$

得到

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = 1.$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial y} P\left(0, \frac{1}{2}\right) = 1 \geqslant 0 \geqslant -1 = \frac{\partial}{\partial y} P\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

再求$\alpha$. 由(2.59)中最后一个公式:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial y} P\left(0, \frac{1}{2}\right) + (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial y} P\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

即

$$\alpha\left[-2\left(0 - \frac{1}{2}\right)\right] + (1-\alpha)\left[-2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = 0,$$

求得 $\alpha = \frac{1}{2}$. 局中人 1 的最优策略是

$$F^*(x) = \frac{1}{2} I_0(x) + \frac{1}{2} I_1(x).$$

## 2.6. 可分对策

**定义.** 单位正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ 上无限对策的支付函数如果取下列形式:

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i(x) s_j(y), \qquad (2.60)$$

其中$a_{ij}$是常数, $r_i(x)$, $s_j(y)$是连续函数, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 则称对策为可分对策.

我们称可分对策的支付函数为**可分函数**.

两个变量的多项式显然是可分函数的一种特殊情形.

设可分对策的支付函数是(2.60)；并设局中人1的混合策略是分布函数$F(x)$，局中人2的混合策略是分布函数$G(y)$，则局中人1得到的期望支付是

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 P(x,y)\,dF(x)\,dG(y)\\
&=\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_i(x)\,s_j(y)\right]dF(x)\,dG(y)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int_0^1\int_0^1 r_i(x)\,s_j(y)\,dF(x)\,dG(y)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int_0^1 r_i(x)\,dF(x)\int_0^1 s_j(y)\,dG(y).
\end{aligned}\qquad(2.61)$$

记

$$r_i=\int_0^1 r_i(x)\,dF(x),\quad i=1,\cdots,m,\qquad(2.62)$$

$$s_j=\int_0^1 s_j(y)\,dG(y),\quad j=1,\cdots,n.\qquad(2.63)$$

则可将（2.61）写成下列形式：

$$E(r,s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_i s_j,\qquad(2.64)$$

其中$r=(r_1,\cdots,r_m)$， $s=(s_1,\cdots,s_n)$．

对于每一个分布函数$F(x)$，有一个$r$与之相对应.当$F(x)$在全体分布函数的集中变动时，点$r$的全体是$m$维欧氏空间的一个子集，记为$R$. 同样，对于每一个分布函数$G(y)$，有一个$s$与之相对应. 当$G(y)$在全体分布函数的集中变动时，点$s$的全体是$n$维欧氏空间的一个子集，记为$S$.我们称集$R$和$S$分别为函数$\{r_i(x)\}$和$\{s_j(y)\}$的矩空间.

因此，在可分对策中，局中人1和2选择一个混合策略分别相当于从矩空间$R$和$S$中选择一个点$r$和$s$，局中人1的期望支付是（2.64）．

考虑

$$r_i = r_i(x), \quad i=1,\cdots,m. \tag{2.65}$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，（2.65）是一条空间曲线$C$的参数方程.设 $H$是由曲线$C$生成的凸集，也就是$C$的凸包.同样，以$C'$表示曲线

$$s_j = s_j(y), \quad j=1,\cdots,n, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2.66}$$

并设$H'$是由$C'$生成的凸集，即$C'$的凸包.

下面的定理表明了集$R$与$H$（$S$与$H'$）的关系.

定理2.8. $R = H$ （$S = H'$）.

证明. （1）先证 $R \subseteq H$.我们要证明,若 $r^0 \in R$,则$r^0 \in H$.

设$r^0 = (r_1^0,\cdots,r_m^0) \in R$,而$r^0 \notin H$.假定$F^0(x)$是产生 $r^0$的分布函数，即

$$r_i^0 = \int_0^1 r_i(x)dF^0(x), \quad i=1,\cdots,m.$$

因为$H$是凸集，而$r^0 \notin H$,根据支承超平面定理,存在超平面

$$p: \quad \sum_{i=1}^m c_i z_i + b = 0,$$

使得$r^0 \in p$，且$H$全部位于由$p$确定的二半空间之一中.这就是说，我们有

$$\sum_{i=1}^m c_i r_i^0 + b = 0; \tag{2.67}$$

而且

$$\sum_{i=1}^m c_i r_i(x) + b < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.68}$$

因此，存在$\delta > 0$，使得

$$\sum_{i=1}^m c_i r_i(x) + b \leqslant -\delta < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.69}$$

（证明与 1.5 节中引理 1 的证明相类似.这里的 $\delta > 0$ 就是[19] §16.3中$H$与$r^0$的最短矩离.）

由（2.67）和（2.69）得到

$$\sum_{i=1}^m c_i r_i^0 - \sum_{i=1}^m c_i r_i(x) \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

关于分布函数$F^0(x)$进行积分：

$$\sum_{i=1}^{m} c_i r_i^0 \int_0^1 d\, F^0(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i \int_0^1 r_i(x) dF^0(x)$$

$$\geqslant \delta \int_0^1 dF^0(x).$$

即

$$\sum_{i=1}^{m} c_i r_i^0 - \sum_{i=1}^{m} c_i r_i^0 \geqslant \delta > 0.$$

我们得到 $0 > 0$. 这是不可能的. 因此，$R \subseteq H$.

（2）现在证明$H \subseteq R$.

设$r^0 = (r_1^0, \cdots, r_m^0) \in H$，则$r^0$可以表为曲线$C$上$m$个点的凸线性组合（证明可参看〔8〕第2卷358页或〔16〕定理2.1），即

$$r_i^0 = \sum_{k=1}^{m} a_k r_i(x_k), \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中$a_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{m} a_k = 1$，且$0 \leqslant x_k \leqslant 1$，$k = 1, \cdots, m$. 但

$$F^0(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{x_k}(x)$$

是产生$r^0$的分布函数；这是因为，对于$i = 1, \cdots, m$，

$$\int_0^1 r_i(x) d\, F^0(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^1 r_i(x) d I_{x_k}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k r_i(x_k) = r_i^0.$$

因此，$r^0 \in R$.

由（1）和（2），$R = H$. 同理，$S = H'$. ■

根据这个定理，可分对策中局中人1，2选择混合策略分别相当于在凸包$H$和$H'$中选择一个点$r$和$s$，期望支付仍由公式（2.64）计算.

设$r^* = (r_1^*, \cdots, r_m^*) \in R$，$s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*) \in S$分别是局中人

1，2在可分对策中的最优策略，局中人1得到的期望支付是

$$E(r^*,s^*)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_i^*s_j^*. \qquad (2.70)$$

我们有

$$\max_{r\in R} E(r,s^*)=E(r^*,s^*)=v=\min_{s\in S} E(r^*,s), \qquad (2.71)$$

其中$v$是对策的值.

怎样求最优策略 $r^*$和$s^*$？我们现在简略地介绍一种方法，称为不动点法，或称为映射法.

考虑下述映射.

对于任意$r^*\in R$（这里并不要求$r^*$是最优策略），定义映射在$S$中的象点集为

$$S(r^*)=\{s:\ r^*\in R,\ E(r^*,s)=\min_{s\in S} E(r^*,s)\}\subseteq S.$$

同样；对于任意$s^*\in S$，定义映射在$R$中的象点集为

$$R(s^*)=\{r:\ s^*\in S,\ \max_{r\in R} E(r,s^*)=E(r,s^*)\}\subseteq R$$

$S(r^*)$和$R(s^*)$都是凸集.

如果 $r^*\in R(s^*)$且 $s^*\in S(r^*)$，则由定义，

$$\max_{r\in R}E(r,s^*)=E(r^*,s^*),$$

$$E(r^*,s^*)=\min_{s\in S}E(r^*,s).$$

即$r^*$，$s^*$满足（2.71）式，因而分别是局中人1，2的最优策略.

设$R^*$和$S^*$分别是局中人1和2的最优策略集.如果$r^*\in R^*$，则有

$$S(r^*)=\{s:\ r^*\in R^*,\ E(r^*,s)=\min_{s\in S} E(r^*,s)\}=S^*.$$

这就是说，$r^*$的象点集是$S^*$.也就是说，每一个$s^*\in S^*$是每一个$r^*\in R^*$的象点.同理，每一个$r^*\in R^*$是每一个$s^*\in S^*$的象点.因此，最优策略$r^*\in R^*$和$s^*\in S^*$都是上述映射的不动点.求最优策略的问题就转化为求不动点的问题．下面我们通过一个例题来说

明这种方法．

例3． 单位正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$， $0 \leqslant y \leqslant 1$ 上可分对策的支付函数是

$$P(x,y)=\left(\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x-1\right)y^2$$

$$+\frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-3\sin\frac{\pi}{2}x\right)y$$

$$+\frac{1}{3}\left(5\sin\frac{\pi}{2}x-3\cos\frac{\pi}{2}x\right).$$

（2.65）中曲线$C$的参数方程是

$$\begin{cases} r_1=\sin\dfrac{\pi}{2}x, \\ r_2=\cos\dfrac{\pi}{2}x, \end{cases} \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

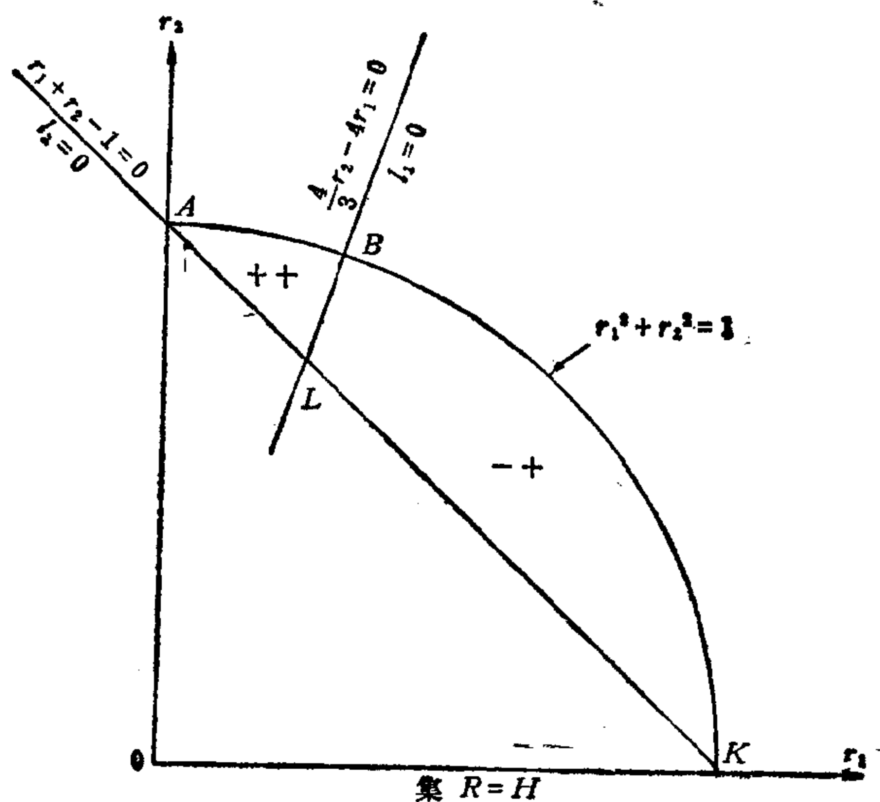


图 2.3

集 $S=H$

图 2.4

这是一段圆弧，方程为$r_1^2+r_2^2=1$.曲线$C$的凸包$H$即$R$是图2.3中的区域$ABKA$.

曲线$C'$的参数方程是

$$\begin{cases} s_1=y, \\ s_2=y^2, \end{cases} \qquad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

这是一段抛物线弧，方程为$s_2=s_1^2$.曲线$C'$的凸包$H'$即$S$是图2.4中的区域$OMNO$.

将支付函数（2.64）写成下面两种形式：

$$E(r,s)=\frac{4}{3}(r_2-3r_1)s_1+(r_2+r_1-1)s_2+\frac{1}{3}(5r_1-3r_2) \tag{2.72}$$

$$=\left(s_2-4s_1+\frac{5}{3}\right)r_1+\left(\frac{4}{3}s_1+s_2-1\right)r_2-s_2. \tag{2.73}$$

在图2.3中，直线$l_1=\frac{4}{3}r_2-4r_1=0$和$l_2=r_1+r_2-1=0$

将局中人1的策略空间$R=H$分为三个区域如下：

$ABL$：　$l_1\geqslant 0$，$l_2\geqslant 0$，不包含$l_1=l_2=0$ 即$L$点；

$BKL$：　$l_1\leqslant 0$，$l_2\geqslant 0$，不包含$l_1=l_2=0$ 即$L$点；

$L$：　$l_1=l_2=0$.

在图2.4中，直线$m_1=s_2-4s_1+\frac{5}{3}=0$和$m_2=\frac{4}{3}s_1+s_2-1=0$将局中人2的策略空间$S=H'$分为五个区域如下：

$QVU$：$m_1\geqslant 0$，$m_2\geqslant 0$，不包含$m_1=m_2=0$即$U$点；

$OQUW$：$m_1\geqslant 0$，$m_2\leqslant 0$，不包含$m_1=m_2=0$即$U$点；

$UVNT$：$m_1\leqslant 0$，$m_2\geqslant 0$，不包含$m_1=m_2=0$即$U$点；

$WUT$：$m_1\leqslant 0$，$m_2\leqslant 0$，不包含$m_1=m_2$即线段$UM$；

$UM$：$m_1=m_2\leqslant 0$.

为了求出映射的不动点，我们分别考虑上列各个区域中的点在映射下的象点.

例如，若$r^0\in ABL$，则因$ABL$中$l_1\geqslant 0$，$l_2\geqslant 0$，所以$E(r^0,s)$在$s_1=s_2=0$即$s^0=(0,0)$处取最小值.但对于$s^0=O=(0,0)\in OQUW$，因为$OQUW$中$m_1\geqslant 0$，$m_2\leqslant 0$，所以$E(r,s^0)$在$r_1=1$，$r_2=0$即$r^0=(1,0)=K$处取最大值.而点$K$在区域$ABL$之外.因此，$ABL$中没有不动点，即没有一个点是局中人1的最优策略.

又若$r^0\in BKL$，则因$BKL$中$l_1\leqslant 0$，$l_2\geqslant 0$，所以$E(r^0,s)$在$S$中弧$OTN$上某一点处取最小值.这是因为，从(2.72)可以看出：对于固定的$r^0$，当$s_1$不变时，$s_2$越小则$E(r^0,s)$越小；当$s_2$不变时，$s_1$越大则$E(r^0,s)$越小.因此，$E(r^0,s)$的最小值必取在弧段$OTN$上.

又如，若$s^0\in OQUW$，则因$OQUW$中$m_1\geqslant 0$，$m_2\leqslant 0$，所以$E(r,s^0)$在$r_1=1$，$r_2=0$即$r^0=(1,0)$处取最大值.但对于$r^0=(1,0)=K\in BKL$，因为$BKL$中$l_1\leqslant 0$，$l_2\geqslant 0$，所以$E(r^0,s)=-4s_1+\frac{5}{3}$在$s_1=1$，$s_2=1$即点$N$处取最小值.而点$N$在区域$OQUW$之

外.因此，$OQUW$中没有一个点是局中人2的最优策略.

再如，若$s^0\in UM$，则在线段$UM$上$m_1=m_2\leqslant 0$，$E(r,s^0)=m_1(r_1+r_2)-s_2$当$r_1+r_2=1$时取最大值.这就是说，$R$中直线段$AK$上每一点都是$s^0$在映射下的象点.

又若$s^0\in WUT$，则因$WUT$中$m_1\leqslant 0$，$m_2\leqslant 0$，$m_1\neq m_2$，所以从（2.73）首先可以看出，$E(r,s^0)$在$R$中的最大值必取在直线段$AK$上.$AK$的方程是$r_1+r_2=1$.而由于$m_1\neq m_2$，当$m_1<m_2\leqslant 0$时，$E(r,s^0)$的最大值取在$r_2=1$即点$A$处；当$m_2<m_1\leqslant 0$时，$E(r,s^0)$的最大值取在$r_1=1$即点$K$处.因此，$s^0\in WUT$通过映射，在$R$空间中的象点或为$A$，或为$K$.

其他各个区域中的点在映射下的象点也可类似地求出.我们把全部结果列在下面，其中记号“→”表示“映入”.

在空间$R=H$中：

$ABL$的每一个点→空间$S$中的点$O$；

$BKL$的每一个点→空间$S$中弧$OTN$上某一点；

$L$→$S$中每一个点.

在空间$S=H'$中：

$QVU$的每一个点→空间$R$中弧$ABK$上某一点；

$OQUW$的每一个点→空间$R$中的点$K$；

$UVNT$的每一个点→空间$R$中的点$A$；

$WUT$的每一个点→空间$R$中的点$A$或$K$；

$UM$的每一个点→空间$R$中线段$AK$上的每一个点.

现在，把以上两个映射结合起来，得到：

$QVU$的每个点→圆弧$ABK$上某一点

→$O$或弧$OTN$上某一点；

$OQUW$的每个点→$K$→$N$；

$UVNT$的每个点→$A$→$O$；

$WUT$的每个点→$A$或$K$→$O$或$N$；

$UM$的每个点→线段$AK$上的每个点，其中

$$\begin{cases} AL\ (\text{不包括}L) \to O, \\ LK\ (\text{不包括}L) \to N, \\ L \to S\text{中每个点}. \end{cases}$$

由以上的分析可以看出来，只有下面的映射能够得出不动点：

$$UM \to L \to UM.$$

因此，对策的解是

局中人 1： $L$： $r_1^* = \frac{1}{4}$， $r_2^* = \frac{3}{4}$；

局中人 2： $UM$： $s_1^* = \frac{1}{2}$， $\frac{1}{4} \leqslant s_2^* \leqslant \frac{1}{3}$.

对策的值是 $v = E(r^*, s^*) = -\frac{1}{3}$.

现在把局中人 1 和 2 的最优策略用分布函数表示出来.

对于局中人 1，当$x = 0$时，$(r_1, r_2) = (0, 1)$. 由

$$r_1 = \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x dI_0(x) = 0$$

和

$$r_2 = \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dI_0(x) = 1$$

可知，$(r_1, r_2) = (0, 1)$ 是由分布函数$I_0(x)$产生的. 类似可知，当 $x = 1$时，$(r_1, r_2) = (1, 0)$ 是由分布函数 $I_1(x)$ 产生的. 因此，

$$L = (r_1^*, r_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}(1, 0) + \frac{3}{4}(0, 1)$$

是由分布函数

$$F^*(x) = \frac{1}{4} I_1(x) + \frac{3}{4} I_0(x) \tag{2.74}$$

产生的. 这就是局中人 1 的最优策略.

对于局中人2，当 $y=0$ 时，$(s_1, s_2)=(0,0)$ 对应于分布函数 $I_0(y)$. 当 $y=t$ 时，$(s_1, s_2)=(t,t^2)$ 对应于分布函数 $I_t(y)$. 对于

$$s_1^*=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}\leqslant s_2^*\leqslant\frac{1}{3},$$

因为

$$(s_1,s_2)=\frac{1}{2t}(t, t^2)=\left(\frac{1}{2},\frac{t}{2}\right)$$

是由分布函数 $\frac{1}{2t}I_t(y)$ 产生的，我们令

$$\frac{1}{4}\leqslant\frac{t}{2}\leqslant\frac{1}{3},$$

得到

$$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}.$$

因此，局中人2最优策略的分布函数表示式是

$$G^*(y)=\left(1-\frac{1}{2t}\right)I_0(y)+\frac{1}{2t}I_t(y), \quad \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}. \tag{2.75}$$

最后，我们把可分对策的不动点解法即映射解法的步骤作一小结.

（1）求出曲线 $C$，$C'$ 和它们的凸包 $H=R$，$H'=S$.

（2）用超平面 $l_j=0$ 将空间 $R=H$ 分为区域

$$R_1,\cdots,R_i,\cdots,R_p.$$

用超平面 $m_i=0$ 将空间 $S=H'$ 分为区域

$$S_1,\cdots,S_j,\cdots,S_q.$$

对于每一个 $r^0\in R_i$，求出 $S$ 中取值为

$$\min_{s\in S}E(r^0,s)$$

的集 $S(r^0)$. 对于每一个 $s^0\in S_j$，求出 $R$ 中取值为

$$\max_{r \in R} E(r, s^0)$$

的集$R(s^0)$ .

（3）求出不动点

$$r^* \to s^* \to r^*.$$

这些不动点就是对策的解.同时求出对策的值$v$.

（4）将解用分布函数表示出来.

## 2.7. 定时对策举例

定义在单位正方形上的无限对策，如果它的支付函数$P(x,y)$是下列形式的函数：

$$P(x,y)=\begin{cases} M_1(x,y), & \text{当} x>y, \\ M_0(x,y), & \text{当} x=y, \\ M_2(x,y), & \text{当} x<y, \end{cases} \tag{2.76}$$

这种对策称为**定时对策**（games of timing）.

函数（2.76）在单位正方形的对角线上不连续.

人们在五十年代对策论的早期发展阶段对这类对策曾作过不少研究，特别是用它来解决一些简化了的军事问题，例如简化的空军攻守或空战模型，得出过很有趣的结果.

在本节中，我们通过一个简单的例子，对这类对策作一简单的介绍.

通常用古典的决斗作为例子来描述这种对策.假设局中人1，2各有一发子弹.如果一个局中人开了枪而未命中，则他的对手知道他已用掉了仅有的一发子弹，就可以走到面对面的地方然后开枪，从而稳操胜算.

假定局中人1，2从相隔距离为1的地方同时起步迎面走向对方，只能前进，不能后退.每一个局中人在决斗开始后任何地点都可以开枪，胜者得到支付为1，败者为－1，双方同时开枪且都击中对方或都未击中对方时支付为0.

局中人1的策略是选择在双方距离为$x$时开枪，这里$0 \leqslant x \leqslant$

1，假定命中率函数是 $P_1(x)$，它代表当距离为 $x$ 时击中对方的概率．设局中人2在双方相距为$y$时开枪击中对方的概率为$P_2(y)$，$0\leqslant y\leqslant 1$．他的策略是要选择一个 $y$ 值．双方都希望选择一个最合适的时机开枪，过早或过晚都对自己不利，这就是定时对策名称的由来．

把上述决斗看成是一个零和无限对策，以 $P(x,y)$ 表示局中人 1 得到的支付，我们有

$$P(x,y)=\begin{cases}1\cdot P_1(x)+(-1)[1-P_1(x)]=2P_1(x)-1, & x>y,\\ 1\cdot P_1(x)[1-P_2(x)]+(-1)[1-P_1(x)]P_2(x) & \\ \qquad\qquad =P_1(x)-P_2(x), & x=y,\\ (-1)P_2(y)+1\cdot[1-P_2(y)]=1-2P_2(y), & x<y.\end{cases}$$

在上式中，局中人 1 在双方相距为 $x$ 时开枪．$x>y$ 表示局中人 1 先开枪．$P_1(x)$ 是局中人 2 被击中的概率；若局中人 2 被击中，则局中人 1 得到的支付为 1．$1-P_1(x)$是局中人 2 未被击中的概率；若局中人 2 未被击中，则局中人 1 必将被击中，他得到的支付为 $-1$．因此，$1\cdot P_1(x)$ 与 $(-1)[1-P_1(x)]$ 两项之和是局中人 1 的期望支付．

$x=y$ 是两个局中人同时开枪的情形；其中 $1\cdot P_1(x)[1-P_2(x)]$ 表示 2 被击中而 1 未被击中时 1 得到的期望支付，另一项 $(-1)[1-P_1(x)]P_2(x)$ 则是 2 未被击中而 1 被击中时 1 的期望支付．

最后，$x<y$ 是局中人 2 先开枪的情形．

我们来计算

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y).$$

因为$P_1$，$P_2$ 都是它们各自的变量的递减函数，所以当 $x<y$ 时有$1-2P_2(y)>1-2P_2(x)$．因此，

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ \min_{0\leqslant y\leqslant 1} P(x,y)$$
$$=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min\{2P_1(x)-1,P_1(x)-P_2(x),1-2P_2(x)\}.$$

现将$0\leqslant x\leqslant 1$分为三个区间如下：

$$A=\{x: P_1(x)+P_2(x)\geqslant 1\},$$
$$B=\{x: P_1(x)+P_2(x)=1\},$$
$$C=\{x: P_1(x)+P_2(x)\leqslant 1\}.$$

令

$$\mu(x)=\min\{2P_1(x)-1,\ P_1(x)-P_2(x),\ 1-2P_2(x)\},$$

则

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}P(x,y)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\mu(x)$$
$$=\max\{\max_{x\in A}\mu(x),\ \max_{x\in B}\mu(x),\ \max_{x\in C}\mu(x)\}.$$

设$P_1(x^*)+P_2(x^*)=1$，如图2.5所示. 则

$$A=[0,x^*],\quad B=\{x^*\},\quad C=[x^*,1].$$

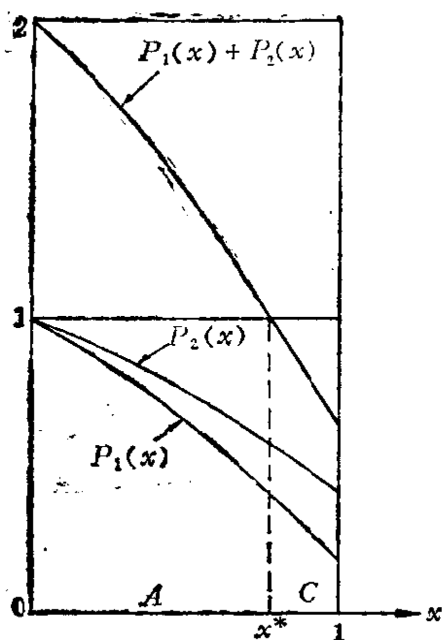



图 2.5

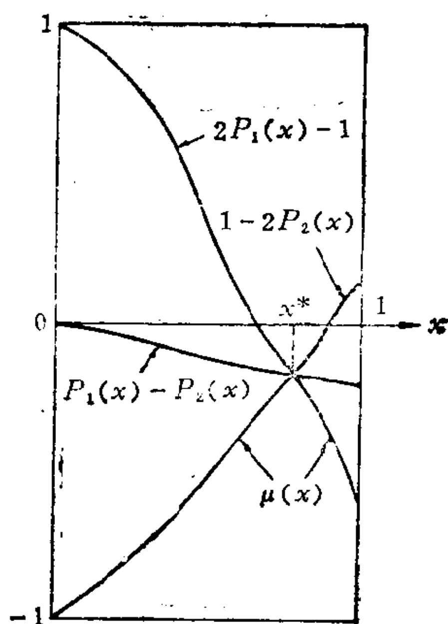



图 2.6

（1）当$x\in A$时，

$$P_1(x)+P_2(x)\geqslant 1.$$

这时有

$$1-2P_2(x)\leqslant P_1(x)-P_2(x)\leqslant 2P_1(x)-1.$$

因此，

$$\mu(x) = 1 - 2P_2(x),$$

它是$x$的增函数，见图2.6. 我们得到

$$\max_{x \in A} \mu(x) = 1 - 2P_2(x^*).$$

（2）当$x \in B$时，

$$P_1(x) + P_2(x) = 1.$$

这时有

$$1 - 2P_2(x) = P_1(x) - P_2(x) = 2P_1(x) - 1.$$

因此，

$$\mu(x) = P_1(x) - P_2(x),$$

$$\max_{x \in B} \mu(x) = P_1(x^*) - P_2(x^*).$$

（3）当$x \in C$时，

$$P_1(x) + P_2(x) \leqslant 1.$$

这时有

$$2P_1(x) - 1 < P_1(x) - P_2(x) \leqslant 1 - 2P_2(x).$$

因此，

$$\mu(x) = 2P_1(x) - 1,$$

它是$x$的减函数. 我们得到

$$\max_{x \in C} \mu(x) = 2P_1(x^*) - 1.$$

由（1），（2），（3）有

$$\max_{x \in [illegible]} \mu(x) = \max_{x \in B} \mu(x) = \max_{x \in C} \mu(x) = P_1(x^*) - P_2(x^*).$$

因此，

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} P(x, y) = P_1(x^*) - P_2(x^*).$$

同样可证，

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} P(x, y) = P_1(y^*) - P_2(y^*),$$

其中$y^*$满足

$$P_1(y^*) + P_2(y^*) = 1.$$

由此可见，对策有一鞍点$(x^*, y^*)$，$x^* = y^*$，满足方程

$$P_1(x^*) + P_2(x^*) = 1.$$

两局中人应在相距为$x^*$时同时开枪. 对策的值是

$$v = P_1(x^*) - P_2(x^*)$$

例4. 设局中人1的命中率函数是 $P_1(x) = 1 - x^2$，局中人2的命中率函数是$P_2(y) = 1 - y$. 则对策的支付函数是

$$P(x,y) = \begin{cases} 1-2x^2, & x>y, \\ x-x^2, & x=y, \\ 2y-1, & x<y. \end{cases}$$

按照以上的分析，两个局中人的最优策略是在相距为$x^*$处同时开枪，$x^*$满足方程

$$P_1(x^*) + P_2(x^*) = 1,$$

即

$$1 - x^{*2} + 1 - x^* = 1,$$

即

$$x^{*2} + x^* = 1.$$

解得

$$x^* = 0.618,$$

对策的值为

$$v = P_1(x^*) - P_2(x^*) = x^* - x^{*2} = 0.236;$$

参看图2.7.

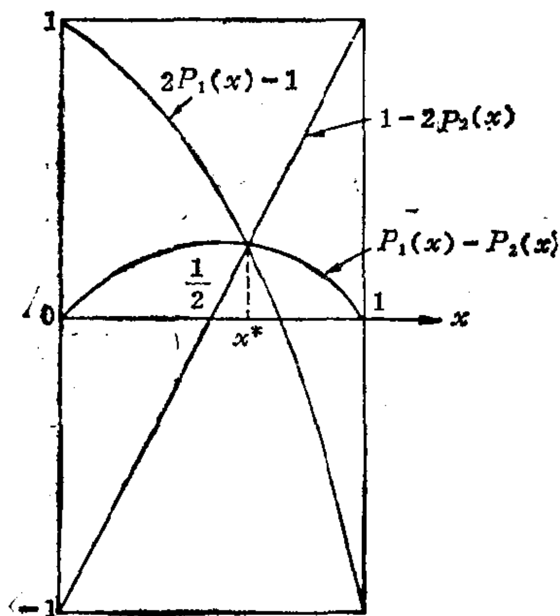



图 2.7

# 第三章　非合作n人对策

## 3.1. 引　　言

前两章讨论的都是由两个局中人参加的对策，并且都是零和对策．零和的意义就是说，双方的利害关系是对抗性的：有利于一个局中人，必然不利于另一个局中人．每个局中人寻求一个对自己一方最有利的策略；这个策略必然也是对另一方损害最大的策略．

我们现在要转而讨论$n$人对策，就是有$n$个局中人参加的对策．$n$人对策（$n\geqslant 2$）又可以分为非合作对策和合作对策．所谓非合作对策，顾名思义，就是局中人之间互不合作，对于策略的选择不容许在事先有任何交换、传递信息的行为，不许可订立任何强制性的约定．每个局中人的目标也是希望自己得到尽可能多的支付，寻求一个对自己尽可能最有利的策略．在一个非合作$n$人对策中，有利于一个局中人的，并不一定不利于其他局中人．即使是一个非合作二人对策，两个局中人的利害关系也可能不是绝对对抗性的．当然，这时对策不再是零和的，因为零和必然是对抗性的．

我们先来看对策论文献中两个最有名的非合作二人对策的例子．

例1．因犯的难题（The prisoners' dilemma）．

某国某地有两个嫌疑犯被拘留隔离审讯．检察官认为他们犯有某项罪行，但未能获得确凿的证据来对他们判刑．检察官分别向这两个囚犯指出他们的两条出路：承认犯罪或不承认犯罪．如果两个人都不承认，则他们都将作为较小的违法案件的被告而受

到惩罚，例如各判刑一年．如果两个人都承认有罪，则两个人都将被判刑，但考虑到主动坦白交代，可以酌量减刑，例如每人判刑六年．但若一个人承认而另一人拒不承认，则承认者可以得到宽大处理，例如只受到拘留三个月的处分，而不承认者则将受到严惩，例如须判刑十年．列表如下：

| | | 罪犯2 不承认 | 罪犯2 承认 |
|---|---|---|---|
| 罪犯1 | 不承认 | 各判刑1年 | 1判刑10年<br>2判刑3个月 |
| | 承认 | 1判刑3个月<br>2判刑10年 | 各判刑6年 |

把每一种处分用一个数量来估价，以支付矩阵的形式来表示，可以写成下面的形式：

| | | 局中人2 策略1 | 局中人2 策略2 |
|---|---|---|---|
| 局中人1 | 策略1 | (8,8) | (0,10) |
| | 策略2 | (10,0) | (2,2) |

这里策略1代表“不承认”，策略2代表“承认”，对两个局中人都一样．每一对数，例如(0,10)，其中第一个数是局中人1得到的支付，第二个数是局中人2得到的支付，是局中人1采取策略1而局中人2采取策略2的结果．这个对策显然不是一个零和对策．

我们也可以把支付分写成两个矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}8 & 0\\10 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}8 & 10\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

$A$是局中人1的支付矩阵，$B$是局中人2的支付矩阵．当局中人1采用策略2而局中人2采用策略1时，局中人1得到支付$a_{21}=10$，局中人2得到支付$b_{21}=0$．

这个例子的支付也可以用下面两个支付矩阵的元素来估价：

$$A=\begin{pmatrix}-12 & -120\\ -3 & -72\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-12 & -3\\ -120 & -72\end{pmatrix}.$$

**例2.** 夫妇爱好问题.

一对夫妇，打算外出欢度周末. 丈夫（局中人 1）喜欢看足球赛，妻子（局中人 2）喜欢看芭蕾舞. 但是，他们更重要的是希望采取同一行动，一同外出娱乐，而不是背道而驰，各看各的. 这个非合作对策的规则规定，双方必须分别作出选择，而不许可在事先进行协商. 如果两个人都以策略 1 表示主张看足球赛，策略 2 表示要看芭蕾舞，则双方在周末文娱活动中得到的享受可以按下列支付矩阵来评价：

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

这两个例子都只有两个局中人. 假定两个局中人互不合作、互不妥协、不允许订立任何强制性的约定、完全不知道关于对方如何采取行动的意图，在这种情形下选择策略，这样的对策就是一个**非合作二人对策**.

如果非合作二人对策中每个局中人有不止两个策略，例如局中人 1 有 $m$ 个策略，局中人 2 有 $n$ 个策略，则支付矩阵可以写成

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}.$$

这种对策称为**双矩阵对策**. 前面两个例子都是双矩阵对策的最简单的情形.

当非合作对策的局中人是 $n$ 个时，称为**非合作 $n$ 人对策**. 这时对策由三个因素确定：

（1）局中人的集 $I=\{1,\cdots,n\}$.

（2）每个局中人 $i$ 有一个纯策略的有限集

$$S_i=\{s^{(i)}\}=\{s_1^{(i)},\cdots,s_{m_i}^{(i)}\},\qquad i=1,\cdots,n.$$

（3）每个局中人 $i$ 有一个支付函数 $P_i$，$i=1,\cdots,n$.

当每一个局中人 $i$ 选定一个策略 $s^{(i)}$ 后，就形成了对策的一个局势

$$s=(s^{(1)},\cdots,s^{(n)}),$$

其中 $s^{(i)}\in S_i$，$i=1,\cdots,n$. 对于对策的每一个局势 $s=(s^{(1)},\cdots,s^{(n)})$，每个局中人 $i$ 得到支付

$$P_i=P_i(s),\quad i=1,\cdots,n.$$

这就是对策在纯策略下的支付函数.

因此，一个非合作 $n$ 人对策 $\Gamma$ 可以用下面的记号来表示：

$$\Gamma=[I,\{S_i\},\{P_i\}],\tag{3.1}$$

其中 $I=\{1,\cdots,n\}$，$\{S_i\}=\{S_1,\cdots,S_n\}$，$\{P_i\}=\{P_1,\cdots,P_n\}$.

我们现在引进下列记号：

$$s\,\|\,t^{(i)}=(s^{(1)},\cdots,s^{(i-1)},t^{(i)},s^{(i+1)},\cdots,s^{(n)}).\tag{3.2}$$

它的意义是：在局势 $s=(s^{(1)},\cdots,s^{(n)})$ 中，第 $i$ 个局中人把他的策略从 $s^{(i)}$ 换成 $t^{(i)}$，其他局中人的策略不变，这样得到的新的局势就是 $s\,\|\,t^{(i)}$. 显然，$s\,\|\,s^{(i)}=s$.

定义1. 设 $s^*$ 是非合作 $n$ 人对策（3.1）的一个局势. 如果对于每一个 $i\in I$ 和每一个 $s^{(i)}\in S_i$ ($s^{(i)}=s_k^{(i)},k=1,\cdots,m_i$)，有

$$P_i(s^*\,\|\,s^{(i)})\leqslant P_i(s^*),\tag{3.3}$$

则称 $s^*$ 是 $\Gamma$ 的一个平衡局势或平衡点(equilibrium point).

在例 1 中，$s^*=(2,\ 2)$ 即局中人 1 的第 2 个策略和局中人 2 的第 2 个策略构成一个平衡局势：

$$0=a_{12}\leqslant a_{22}=2,$$

$$0=b_{21}\leqslant b_{22}=2.$$

显然，在一个非合作 $n$ 人对策中，平衡点不一定存在.

同矩阵对策的情形一样，我们也需要考虑局中人的混合策略.

对于每一个 $i\in I$，设 $x^{(i)}$ 是局中人 $i$ 的一个混合策略，也就是定义在 $S_i$ 上的一个概率分布. 即：

$$x^{(i)}=(x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)}),$$

其中

$$x_k^{(i)}\geqslant 0,\ k=1,\ \cdots,\ m_i,\qquad \sum_{k=1}^{m_i} x_k^{(i)}=1. \tag{3.4}$$

局中人 $i$ 以概率 $x_k^{(i)}$ 选择纯策略 $s_k^{(i)}$，$k=1, \cdots, m_i$.我们称$x=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$为对策 Γ 的一个混合策略局势.

类似于(3.2)，我们定义下列记号：

$$x\|z^{(i)}=(x^{(1)}, \cdots, x^{(i-1)}, z^{(i)}, x^{(i+1)}, \cdots, x^{(n)}). \tag{3.5}$$

这就是说，在混合策略局势

$$x=(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$$

中，第 $i$ 个局中人把他的混合策略 $x^{(i)}$换成另一个混合策略$z^{(i)}$，其他局中人的策略不变，所得到的混合策略局势就是 $x\|z^{(i)}$. 显然，$x\|x^{(i)}=x$.

混合策略下的非合作 $n$ 人对策由下列三个因素确定：

（1）局中人的集 $I=\{1, \cdots, n\}$.

（2）每个局中人有一个混合策略的集

$$X_i=\{x^{(i)}\}=\{(x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)})\},\ i=1, \cdots, n;$$

其中 $x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)}$ 满足(3.4).

（3）每个局中人 $i$ 有一个支付函数

$$P_i=P_i(s),\ i=1, \cdots, n;$$

并设

$$E_i=E_i(x)$$

是局中人 $i$ 在混合策略局势 $x=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$下得到的期望支付.

因此，在混合策略的情形，一个非合作 $n$ 人对策 Γ 可以用下面的记号来表示：

$$\Gamma\equiv[I,\ \{X_i\},\ \{P_i\}], \tag{3.6}$$

其中 $I=\{1,\cdots,n\}$，$\{X_i\}=\{X_1,\cdots,X_n\}$，$X_i=\{x^{(i)}\}=\{(x_1^{(i)},$

$\cdots, x_{m_i}^{(i)})\}$, $\{P_i\}=\{P_1, \cdots, P_n\}$.

为了简便，这里我们仍用Γ表示对策，但这里和后文中的Γ是混合策略下的对策．我们以$\{E_i\}$表示期望支付．

顺便指出，这里的$X_i$就是第一章中的$S_{m_i}$，即$m_i$维欧氏空间中的$(m_i-1)$维单纯形．

**定义2．** 设$x^*$是非合作$n$人对策(3.6)的一个混合策略局势．如果对于每一个$i\in I$和每一个$x^{(i)}\in X_i$，有

$$E_i(x^*\|x^{(i)})\leqslant E_i(x^*), \tag{3.7}$$

则称$x^*$是Γ(在混合策略下)的一个平衡局势或平衡点．

J.F.Nash证明了混合策略下平衡点必定存在．参看〔17〕，〔18〕或〔12〕，〔25〕，〔29〕．

## 3.2. 平衡点的存在性：Nash定理

我们先证明平衡点的一个重要性质．

**定理3.1．** 设$\Gamma\equiv[I, \{X_i\}, \{P_i\}]$是非合作$n$人对策．$x^*$是Γ的平衡点的充要条件是：对于每一个局中人$i$和每一个纯策略$s^{(i)}\in S_i$，有

$$E_i(x^*\|s^{(i)})\leqslant E_i(x^*). \tag{3.8}$$

这里$E_i(x^*\|s^{(i)})$是将$i$的混合策略$x^{*(i)}$换成一个纯策略$s^{(i)}$后的期望支付．

**证明．**

**必要性．** 显然．

**充分性．** 设(3.8)成立，即，对于每一个$i$有

$$E_i(x^*\|s_k^{(i)})\leqslant E_i(x^*),\quad k=1, \cdots, m_i. \tag{3.9}$$

设$x^{(i)}=(x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)})\in X_i$是局中人$i$的任意一个混合策略．(3.9)中$m_i$个不等式两端依次乘以$x_k^{(i)}$，得到

$$E_i(x^*\|s_k^{(i)})x_k^{(i)}\leqslant E_i(x^*)x_k^{(i)},\quad k=1, \cdots, m_i.$$

对$k$从1到$m_i$求和：

$$\sum_{k=1}^{m_i} E_i(x^* \| s_k^{(i)}) x_k^{(i)} \leqslant E_i(x^*) \sum_{k=1}^{m_i} x_k^{(i)}.$$

但上式左端就是 $E_i(x^* \| x^{(i)})$，右端的和式等于 1 .因此，

$$E_i(x^* \| x^{(i)}) \leqslant E_i(x^*), \quad i=1, \cdots, n,$$

$x^*$是 Γ 的平衡点. ∎

利用这个定理，可以验证一个混合策略局势 $x$ 是否平衡点.

例如，在上节的例 2 中，支付是

$$\begin{pmatrix} (2, & 1) & (-1, -1) \\ (-1, -1) & (1, & 2) \end{pmatrix}.$$

不难验证，

$$x^{(1)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

和

$$x^{(2)} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

构成一个平衡点

$$x^* = \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right).$$

事实上，$E_1(x^*) = \frac{1}{5}$，$E_2(x^*) = \frac{1}{5}$；

$$E_1(x^* \| s_1^{(1)}) = \frac{1}{5} \leqslant E_1(x^*),$$

$$E_1(x^* \| s_2^{(1)}) = \frac{1}{5} \leqslant E_1(x^*),$$

$$E_2(x^* \| s_1^{(2)}) = \frac{1}{5} \leqslant E_2(x^*),$$

$$E_2(x^* \| s_2^{(2)}) = \frac{1}{5} \leqslant E_2(x^*).$$

因此，$x^*$是对策的一个平衡点.参看下节的例 3 .

下面是Nash关于非合作$n$人对策平衡点的基本定理.

**定理3.2.** 每一个非合作$n$人对策

$$\Gamma=[I, \{X_i\}, \{P_i\}]$$

必有平衡点.

**证明.** 设$x=(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$是$\Gamma$的任意混合策略局势.对于每一个$i\in I=\{1,\cdots,n\}$的每一个纯策略$s_j^{(i)}, j=1,\cdots,m_i$,定义

$$\phi_{ij}(x)=\max\{0, E_i(x\| s_j^{(i)})-E_i(x)\}. \quad (3.10)$$

对于每一个$x_j^{(i)}$, $j=1, \cdots, m_i$, $i=1, \cdots, n$, 定义

$$y_j^{(i)}=\frac{x_j^{(i)}+\phi_{ij}(x)}{1+\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}(x)}. \quad (3.11)$$

上式的分子$\geqslant 0$,分母$\geqslant 1$,因而

$$y_j^{(i)}\geqslant 0, \ j=1, \cdots, m_i, \quad \sum_{j=1}^{m_i} y_j^{(i)}=1,$$

所以$y^{(i)}=(y_1^{(i)}, \cdots, y_{m_i}^{(i)})$是局中人$i$的一个混合策略.

$y^{(i)}=(y_1^{(i)}, \cdots, y_{m_i}^{(i)})$是$x$的连续函数,所以$y=(y^{(1)}, \cdots, y^{(n)})$是$x$的连续函数.根据Brouwer不动点定理(这一定理是:定义在有限维欧氏空间紧凸子集$S$上从$S$映入其本身的连续映射必有不动点),存在不动点

$$x^*=(x^{*(1)}, \cdots, x^{*(n)}),$$

其中

$$x^{*(i)}=(x_1^{*(i)}, \cdots, x_{m_i}^{*(i)})\in X_i,$$

使得

$$x_j^{*(i)}=\frac{x_j^{*(i)}+\phi_{ij}(x^*)}{1+\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}(x^*)}, \quad j=1, \cdots, m_i, \ i=1, \cdots, n. \quad (3.12)$$

我们要证明,这个不动点就是对策$\Gamma$的一个平衡点.

首先,对于上述任意的混合策略局势$x=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$,每个局中人$i$的混合策略$x^{(i)}$中必将引用某个纯策略$s_k^{(i)}$,使得

$$E_i(x \| s_k^{(i)}) \leqslant E_i(x). \tag{3.13}$$

[证明如下：对于每一个$x^{(i)}=(x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)})$，必存在某些(至少一个)$j$使$x_j^{(i)}>0$. 这就是说，每一个混合策略$x^{(i)}$中必包含某些纯策略.假设这些纯策略中最不利于局中人$i$的一个是$s_k^{(i)}$，即

$$E_i(x \| s_k^{(i)}) \leqslant E_i(x \| s_j^{(i)}),$$

其中$j$满足条件$x_j^{(i)}>0$.上面这个不等式两边依次分别乘以$x_j^{(i)}$，并对满足$x_j^{(i)}=0$的那些相应的项也依次分别乘以$x_j^{(i)}$，然后对$j$从1到$m_i$求和，我们得到

$$\begin{aligned} & E_i(x \| s_k^{(i)}) \sum_{j=1}^{m_i} x_j^{(i)} \\ & \leqslant \sum_{\substack{j \\ x_j^{(i)}>0}} E_i(x \| s_j^{(i)}) x_j^{(i)} + \sum_{\substack{j \\ x_j^{(i)}=0}} E_i(x \| s_j^{(i)}) x_j^{(i)} \\ & = \sum_{j=1}^{m_i} E_i(x \| s_j^{(i)}) x_j^{(i)} = E_i(x \| x^{(i)}) = E_i(x), \end{aligned}$$

即$E_i(x \| s_k^{(i)}) \leqslant E_i(x)$.]

因此，对于$x^*=(x^{*(1)}, \cdots, x^{*(n)})$，局中人$i$的策略$x^{*(i)}$中必定包含一个$x_k^{*(i)}>0$，使得

$$E_i(x^* \| s_k^{(i)}) \leqslant E_i(x^*),$$

从而

$$E_i(x^* \| s_k^{(i)}) - E_i(x^*) \leqslant 0.$$

由(3.10)有

$$\phi_{ik}(x^*) = 0.$$

对于上述局中人$i$的策略$x_k^{*(i)}$，(3.12)式变为

$$x_k^{*(i)} = \frac{x_k^{*(i)} + \phi_{ik}(x^*)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x^*)} = \frac{x_k^{*(i)}}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x^*)},$$

其中$x_k^{*(i)}>0$.由此得到

$$\sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x^*) = 0.$$

但由$\phi_{ij}(x^*)$的定义(3.10)，所有的$\phi_{ij}(x^*)$都是非负的，所以

从上式可知，对于每一个 $j=1, \cdots, m_i$,

$$\phi_{ij}(x^*)=0.$$

因此，仍根据(3.10)式，有

$$0 \geqslant E_i(x^* \| s_j^{(i)}) - E_i(x^*), \quad j=1, \cdots, m_i,$$

即

$$E_i(x^* \| s_j^{(i)}) \leqslant E_i(x^*), \quad j=1, \cdots, m_i.$$

上式对于每一个 $i=1, \cdots, n$ 成立. 由本节定理 3.1 可知，$x^*$ 是对策 $\Gamma$ 的一个平衡点. ■

## 3.3. 2×2双矩阵对策的平衡点

双矩阵对策当 $m$, $n$ 较大时，求平衡点的计算量是很庞大的. 我们现在只讨论 2×2 双矩阵对策平衡点的求法.

设双矩阵对策局中人 1，2 的支付矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

以 $X=(x, 1-x)$, $Y=(y, 1-y)$ 分别表示局中人 1，2 的混合策略，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

对策的混合策略局势由一对数 $(x, y)$ 完全确定. 为了书写简便，就以 $E_1(x, y)$, $E_2(x, y)$ 分别表示局中人 1，2 在混合策略 $(x, y)$ 下得到的期望支付.

根据上节的定理 3.1，$(x, y)$ 是对策平衡点的充要条件是

$$E_1(1, y) \leqslant E_1(x, y), \tag{3.14}$$

$$E_1(0, y) \leqslant E_1(x, y), \tag{3.15}$$

$$E_2(x, 1) \leqslant E_2(x, y), \tag{3.16}$$

$$E_2(x, 0) \leqslant E_2(x, y). \tag{3.17}$$

我们先来看(3.14)，(3.15)两个不等式. 由于

$$E_1(x, y)=XAY',$$

展开化简后变为

$$Q(1-x)y - q(1-x) \leqslant 0, \tag{3,18}$$

$$Qxy - qx \geqslant 0, \tag{3.19}$$

其中

$$Q = a + d - b - c, \qquad q = d - b. \tag{3.20}$$

当 $Q=0$ 且 $q=0$ 时，(3.18)，(3.19)的解是

$$\text{一切 } x \in [0, 1] \text{和一切} y \in [0, 1]. \tag{3.21}$$

当 $Q=0$ 而 $q>0$ 时，解为

$$x = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{3.22}$$

当 $Q=0$ 而 $q<0$ 时，解为

$$x = 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{3.23}$$

当 $Q \neq 0$时，解为

$$\left.\begin{array}{ll} x=0, & y \leqslant \dfrac{q}{Q} = \alpha, \\ 0<x<1, & y = \dfrac{q}{Q} = \alpha, \\ x=1, & y \geqslant \dfrac{q}{Q} = \alpha. \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

类似地，令

$$R = a' + d' - b' - c', \quad r = d' - c', \tag{3.25}$$

并令

$$\frac{r}{R} = \beta,$$

则(3.16)和(3.17)简化为

$$Rx(1-y) - r(1-y) \leqslant 0, \tag{3.26}$$

$$Rxy - ry \geqslant 0. \tag{3.27}$$

当 $R=0$ 且 $r=0$ 时，(3.26)，(3.27)的解是

$$\text{一切 } x \in [0, 1] \text{和一切 } y \in [0, 1]. \tag{3.28}$$

当 $R=0$ 而$r>0$ 时，解为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad y = 0. \tag{3.29}$$

当 $R=0$ 而 $r<0$ 时，解为

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad y=1. \tag{3.30}$$

当 $R\neq 0$ 时，解为

$$\left.\begin{array}{ll} x\leqslant \dfrac{r}{R}=\beta, & y=0, \\ x=\dfrac{r}{R}=\beta, & 0<y<1, \\ x\geqslant \dfrac{r}{R}=\beta, & y=1. \end{array}\right\} \tag{3.31}$$

将(3.21)-(3.24)和(3.28)-(3.31)结合起来，就得到 $2\times 2$ 双矩阵对策在任何情形下的平衡点.

例 3. 对于 3.1 节例 2 中的 $2\times 2$ 双矩阵对策，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

按照公式(3.20)和(3.25)，算得

$$Q=5>0, \quad q=2, \quad \alpha=\frac{q}{Q}=\frac{2}{5},$$

$$R=5>0, \quad r=3, \quad \beta=\frac{r}{R}=\frac{3}{5}.$$

将这些数值代入公式(3.24)和(3.31)，得到

$$\left.\begin{array}{ll} x=0, & y\leqslant \dfrac{2}{5}, \\ 0<x<1, & y=\dfrac{2}{5}, \\ x=1, & y\geqslant \dfrac{2}{5}; \end{array}\right\} \tag{3.33}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x\leqslant\frac{3}{5}, & y=0, \\ x=\frac{3}{5}, & 0<y<1, \\ x\geqslant\frac{3}{5}, & y=1. \end{array}\right\} \qquad (3.34)$$

解这些不等式，求得对策有三个平衡点：

$$(x, y)=(0, 0), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), (1, 1).$$

用局中人1，2的混合策略

$$(X, Y)=((x, 1-x), (y, 1-y))$$

表示，就是

$$((0, 1), (0, 1)), \qquad (3.35)$$

$$\left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right), \qquad (3.36)$$

$$((1, 0), (1, 0)). \qquad (3.37)$$

第一个平衡点就是局中人1，2都选择他们的第2个纯策略. 第二个平衡点是局中人1以$\frac{3}{5}$的概率选择策略1，以$\frac{2}{5}$的概率选择策略2；局中人2则以$\frac{2}{5}$的概率选择策略1，以$\frac{3}{5}$的概率选择策略2. 第三个平衡点是局中人1，2都选择他们的策略1.

不等式组(3.33)在图3.1中以粗黑线条画出，不等式组(3.34)则用虚线画出. 容易看出，粗线和虚线的交点就是对策的三个平衡点.

我们在例2中已经计算过，在第二个平衡点(3.36)处，局中人1，2的期望支付分别是

$$E_1=\frac{1}{5}, \qquad E_2=\frac{1}{5}.$$

这一对支付显然比第一和第三个平衡点处局中人1,2所得的支付都小. 但是，由于这是一个非合作二人对策，不许可在选择策略前进行协商，所以两个局中人没有办法可以保证一定能达到第一或第三个平衡局势.

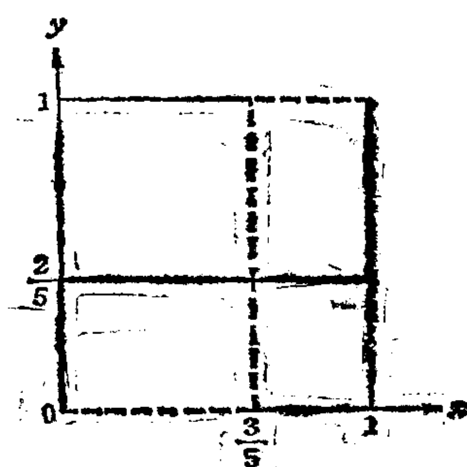


图 3.1

在这个“夫妇爱好问题”(3.32)中，当局中人1，2分别采取混合策略$(x, 1-x)$，$(y, 1-y)$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$时，他们的期望支付不难算出是

$$E_1(x, y) = 5xy - 2(x+y) + 1, \qquad (3.38)$$

$$E_2(x, y) = 5xy - 3(x+y) + 2. \qquad (3.39)$$

我们现在画出$E_1E_2$平面上当$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$时$(E_1, E_2)$的图形.

由(3.38)，(3.39)不难得到

$$5(E_1-E_2)^2 - 2(E_1+E_2) + 1 = 5(x-y)^2.$$

当$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$时，有

$$0 \leqslant 5(E_1-E_2)^2 - 2(E_1+E_2) + 1 \leqslant 5. \qquad (3.40)$$

若由(3.38)，(3.39)解出$X$与$Y$，还可得到

$$2E_1 - 3E_2 - 1 \leqslant 0, \qquad (3.41)$$

$$3E_1 - 2E_2 + 1 \geqslant 0. \qquad (3.42)$$

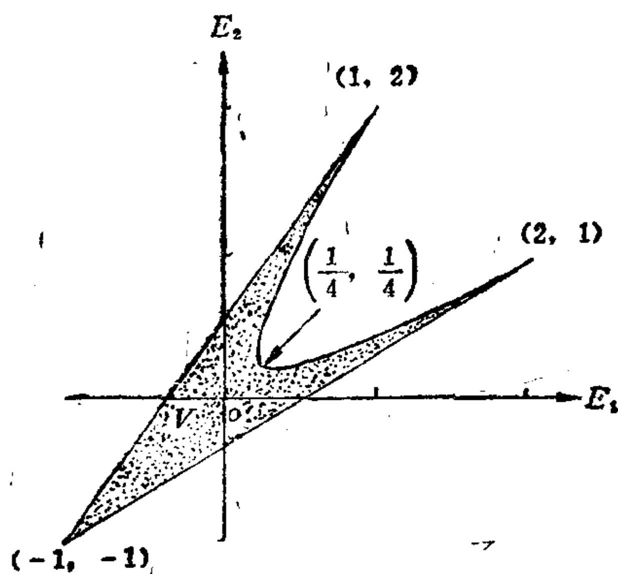


图 3.2

先看(3.40). 方程

$$5(E_1-E_2)^2 - 2(E_1+E_2) + 1 = 0$$

的图形是一条抛物线，顶点在$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$，抛物线过(1,2)，(2,1)两点．满足不等式

$$5(E_1-E_2)^2-2(E_1+E_2)+1\geqslant 0$$

的点$(E_1, E_2)$在抛物线的外侧，即包含原点$O$的一方．

因此，满足(3.40)，(3.41)，(3.42)的点$(E_1,E_2)$形成一个区域，就是图3.2中的阴影区域$V$．对于局中人1，2的每一对混合策略$(x, y)$，有$V$中一个点$(E_1, E_2)$与之相对应；反之，对于$V$中每一个点$(E_1,E_2)$，有局中人1,2的至少一对混合策略$(x,y)$，使得$(E_1, E_2)$是这一对策略下局中人1，2的期望支付．区域$V$是对策的**支付集合**．

我们现在讨论的这个对策，虽然它有三个平衡点，但每一个平衡点作为对策的解都是不能令人信服的．

在一个非合作$n$人对策中，可以有不止一个平衡点．而两个不同的平衡点给予同一个局中人的支付可以是不相同的．因此，关于这一类对策，还不存在较简单的令人满意的“最优策略”以及对策的“值”等概念．Nash定理只保证了平衡点的存在性．平衡点存在与怎样定义非合作$n$人对策的解还有很大的距离．

直观地看，在上面这个例子里，对于两个局中人来说，

$$(X, Y)=((1, 0), (1, 0))\text{和}((0, 1),(0, 1))$$

这两个平衡局势都比另一个平衡局势

$$(X, Y)=\left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right)$$

有利．但是，由于对策是非合作的，不允许两个局中人事先作任何约定，因此，没有办法保证他们达到前两个平衡局势中的任何一个．

由于这个对策对于两个局中人是对称的，一种理想的解决办法是：局中人1,2以等概率同时选择策略1或同时选择策略2．这样就必然导致上述的前两个平衡点之一，而且两个局中人所得的

期望支付都是$\frac{3}{2}$.但是，这已完全超出了非合作对策的范畴.这样的支付点显然不属于图3.2的支付集合$V$.这种做法实际上相当于局中人1,2事先商定二人都选择策略1（或2），然后从二人所得的支付总和中每人分得一半，也就是对于得到的支付进行重新分配，这些都是非合作对策所不允许的.

例4. 3.1节例1中“囚犯的难题”的支付距阵是

$$A=\begin{pmatrix}8 & 0\\10 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 10\\0 & 2\end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

利用公式(3.20)和(3.25)计算$Q$，$q$，$R$，$r$：

$$Q=0,\ q=2>0,$$
$$R=0,\ r=2>0.$$

由(3.22)和(3.29)知，对策的平衡点$(x, y)$满足下列关系：

$$x=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad y=0.$$

因此，对策有唯一的一个平衡点，即(见图3.3)

$$x=0,\quad y=0,$$

或

$$(X, Y)=((0, 1), (0, 1)).$$

局中人1和2都选择第2个纯策略，也就是都承认犯了罪，得到的支付都是2，相当于各判刑6年。

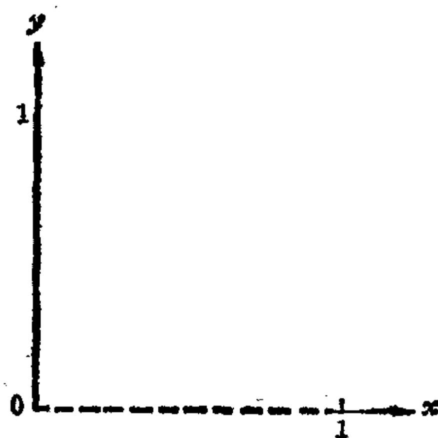


图 3.3

从支付矩阵(3.43)来看，这个平衡局势对他们显然不是最有利的. 如果两个局中人都选择第1个策略，即$x=1$，$y=1$，每人都能得到支付8，相当于各判刑一年. 对他们来说，这才是最有利的结局.但是，在非合作对策的范畴内，这个最有利的局势也是难以达到的.

我们在例 1 中还提到，这一问题的支付也可能用下列支付矩阵的元素来估价：

$$A=\begin{pmatrix} -12 & -120 \\ -3 & -72 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ -120 & -72 \end{pmatrix}.$$

这一个双矩阵对策平衡点的计算留给读者.

# 第四章　合作 n 人对策

## 4.1. 引　言

在一个非合作 $n$ 人对策中，两个或两个以上的局中人不许可事先商定如何选择策略，不许可把他们的策略结合起来．局中人之间不允许对得到的支付进行任何重新分配，一个局中人不能分享另一局中人得到的支付．

我们在本章中要讨论的合作 $n$ 人对策，则对上述两个方面的问题都不加限制．局中人可以进行充分的合作：可以在事先商定，把他们的策略协调结合起来；可以在终局后重新分配若干个局中人所得支付的总和．

因此，我们要考虑的有以下几个因素：

首先，由于两个或两个以上的局中人要在某些方面进行合作，他们需要结成一个联盟或合伙(coalition)．这是合作 $n$ 人对策的一个重要因素；在非合作对策中，每个局中人都为自己的最大利益而奋斗，不存在结成联盟的问题．

其次，若干个局中人结成一个联盟后，这个联盟作为一个整体当然希望能够得到尽可能多的收入，即支付．这个最大的支付是联盟的函数．

另外，每个联盟要把得到的总的收入分配给联盟的每一个成员．这就需要用数量来表示这种分配．我们将在 4.3 节中讨论这一问题．

在合作 $n$ 人对策中，各个局中人如何选择策略已不是主要需要考虑的问题．应当强调的乃是联盟的形成．

我们假设，在一个非合作 $n$ 人对策

$$[I, \{X_i\}, \{P_i\}]$$

中，局中人的集是 $I=\{1, \cdots, n\}$. $S$是$I$的任意子集，称为一个联盟. 把 $I$ 中除去 $S$ 中元素后余下的集$I\setminus S$看成另外一个联盟. 以 $S$ 和$I\setminus S$作为一个零和二人对策的两个局中人，以 $S$ 中全部成员的一切联合混合策略作为第一个局中人$S$的策略集，$I\setminus S$中一切成员的一切联合混合策略作为第二个局中人$I\setminus S$的策略集，这个零和二人对策必有一个值. 我们以$v(S)$表示这个值. $v(S)$对于 $I$ 的一切子集 $S$ 有定义，并定义

$$v(\varnothing)=0.$$

我们称 $v(S)$ 为**特征函数**(characteristic function). 特征函数是描述合作 $n$ 人对策的一个重要因素.

**定义.** 设$I=\{1, \cdots, n\}$, $v(S)$是定义在 $I$ 的一切子集（即联盟）的集上的实值函数，并满足条件

$$v(\varnothing)=0, \tag{4.1}$$

$$v(I)\geqslant\sum_{i=1}^{n}v(\{i\}), \tag{4.2}$$

则称 $\Gamma\equiv[I, v]$为**合作 $n$人对策**，$v(S)$为对策的特征函数.

| | 局 1 | 中 2 | 人 3 | 支付 (a, b, c) |
|---|---|---|---|---|
| 策 | A | A | A | (1, 1, 0) |
| | A | A | B | (−3, 1, 2) |
| | A | B | A | (4, −2, 2) |
| | A | B | B | (0, 1, 1) |
| 略 | B | A | A | (1, 2, −1) |
| | B | A | B | (2, 0, −1) |
| | B | B | A | (3, 1, −1) |
| | B | B | B | (2, 1, −1) |

在整个这一章里，我们假定，每个联盟 $S$ 得到的收入可以按照任意方式分配给该联盟的成员．这一条件称为**局外支付**(side payments)条件．

我们通过一个合作三人对策的例子来说明如何将对策写成特征函数的形式．

例1. 设合作三人对策的三个局中人 1, 2, 3 各有两个策略 $A$ 和 $B$. 以 $(a, b, c)$ 表示 1, 2, 3 的支付，列出表格. 如上页

我们要计算这个对策的特征函数 $v$.

首先，设局中人 1, 2 组成联盟 $S=\{1,2\}$. $S$ 和 $I\setminus S=\{3\}$ 之间的零和二人对策的支付矩阵是

| | | {3} A | {3} B |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | AA | 2 | −2 |
| | AB | 2 | 1 |
| | BA | 3 | 2 |
| | BB | 4 | 3 |

这个 4 × 2 矩阵对策有一个鞍点，鞍点处的支付是 3. 因此，

$$v(\{1,2\}) = 3 .$$

其次，令 $S=\{3\}$，则 $I\setminus S=\{1,2\}$. 我们得到下列 2 × 4 矩阵对策：

| | | {1, 2} AA | {1, 2} AB | {1, 2} BA | {1, 2} BB |
|---|---|---|---|---|---|
| {3} | A | 0 | 2 | −1 | −1 |
| | B | 2 | 1 | −1 | −1 |

容易看出，

$$v(\{3\}) = -1 .$$

再令 $S=\{1,3\}$，则 $I\setminus S=\{2\}$. 我们得到下列 4 × 2 矩阵对

策：

| | | {2} | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| {1，3} | AA | 1 | 6 |
| | AB | $-1$ | 1 |
| | BA | 0 | 2 |
| | BB | 1 | 1 |

显然，

$$v(\{1,3\}) = 1.$$

令$S=\{2\}$，则$I\setminus S=\{1,3\}$．我们得到下列$2\times 4$矩阵对策：

| | | {1，3} | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | AA | AB | BA | BB |
| {2} | A | 1 | 1 | 2 | 0 |
| | B | $-2$ | 1 | 1 | 1 |

不难算出，在这个矩阵对策中，以{2}作为第一个局中人，他的最优混合策略是$\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$；以{1,3}作为第二个局中人，其最优混合策略是$\left(\frac{1}{4},0,0,\ \frac{3}{4}\right)$；对策的值是$\frac{1}{4}$．因此，

$$v(\{2\}) = \frac{1}{4}.$$

再令$S=\{2,3\}$，则$I\setminus S=\{1\}$．我们有

| | | {1} | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| {2，3} | AA | 1 | 1 |
| | AB | 3 | $-1$ |
| | BA | 0 | 0 |
| | BB | 2 | 0 |

这个矩阵对策有一个鞍点，在矩阵的右上角处．因此，

$$v(\{2,3\}) = 1 .$$

最后，令$S = \{1\}$，则$I \setminus S = \{2,3\}$．我们有

| | | {2,3} | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | AA | AB | BA | BB |
| {1} | A | 1 | −3 | 4 | 0 |
| | B | 1 | 2 | 3 | 2 |

不难看出，

$$v(\{1\}) = 1 .$$

我们求得了特征函数$v$的值如下：

$$v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = \frac{1}{4},\ v(\{3\}) = -1,$$

$$v(\{1,2\}) = 3,\ v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = 1,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 4.$$

## 4.2. 特征函数的性质

设$I = \{1,\cdots,n\}$．在$[I, \{X_i\}, \{P_i\}]$中，$v(S)$是特征函数．则由定义，

$$v(S) = \max_{x \in X_S} \min_{y \in X_{I/S}} \sum_{i \in S} E_i(x,y)$$

$$= \min_{y \in X_{I \setminus S}} \max_{x \in X_S} \sum_{i \in S} E_i(x,y), \qquad (4.3)$$

这里$X_S, X_{I \setminus S}$分别表示联盟$S$和$I \setminus S$中成员的混合策略按任何方式结合起来所构成的策略集，$E_i(x, y)$是局中人$i$在混合策略$x \in X_S, y \in X_{I \setminus S}$下的期望支付．

**定理4.1.** 设$\Gamma \equiv [I, v]$是合作$n$人对策，则

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T) \qquad (4.4)$$

对于一切$S, T \subseteq I$，$S \cap T = \varnothing$成立．

**证明．** 联盟$S$保证能够得到的最大支付是$v(S)$．同样，联

盟$T$保证能够得到的最大支付是$v(T)$.因此,联盟$S\cup T$即使当$S$和$T$互不合作时也能取得$v(S)+v(T)$. 而根据特征函数的定义,$v(S\cup T)$是$S\cup T$保证能够得到的最大支付. 由此可知,

$$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T). \qquad \blacksquare$$

以上我们采取了〔19〕的简明证明(见该书242页,中译本第211页);我们认为这种证明方法是很令人信服的,丝毫无损于论证的严格性. 形式的证明可参看〔24〕119—120页.

从上面的讨论可知,合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的特征函数$v$是对$I$的一切子集$S$有定义的一个实值集函数,它满足条件(4.1),(4.2)和(4.4).

(4.4)式称为特征函数的**超可加性**(superadditivity). 当等号成立时,即,如果对于一切$S,T\subseteq I,S\cap T=\varnothing$,有

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T), \tag{4.5}$$

则称 $v$ 具有**可加性**.

合作$n$人对策的特征函数如果具有可加性,这种对策称为**非实质性的**(inessential)对策. 它没有什么值得研究的内容,这可以从下面的定理看出来.

**定理4.2.** 合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的特征函数$v$具有可加性的充要条件是

$$v(I)=\sum_{i=1}^{n}v(\{i\}). \tag{4.6}$$

**证明. 必要性.** 显然.

**充分性.** 假定(4.6)式成立. 设$S,T\subseteq I$,$S\cap T=\varnothing$. 连续利用$v$的超可加性有

$$\begin{aligned}v(I)&=\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})\\&=\sum_{i\in S}v(\{i\})+\sum_{i\in T}v(\{i\})+\sum_{i\in I\setminus S\cup T}v(\{i\})\\&\leqslant v(S)+v(T)+v(I\setminus S\cup T)\end{aligned}$$

$$\leqslant v(S \cup T) + v(I \setminus S \cup T) \leqslant v(I).$$

因此，

$$v(S) + v(T) = v(S \cup T). \qquad \blacksquare$$

我们主要感兴趣的合作$n$人对策不是非实质性的对策，而是特征函数 $v$ 满足条件

$$v(I) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \tag{4.7}$$

的对策．这种对策称为**实质性的**(essential)对策．

## 4.3. 转　归

合作对策的每个局中人应当从联盟的收入中分得各自应得的份额．这可以用一个 $n$ 维向量

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \tag{4.8}$$

来表示，其中$x_i$表示局中人 $i$ 在 $x$ 中应得的份额．这个向量应满足下面两个条件：

$$x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(I). \tag{4.10}$$

向量 $x$ 称为一个**转归**(imputation)，或称为**分配**，也可以称为**支付**．

条件(4.9)称为**个体合理性条件**(individual rationality)．这个条件可以这样来理解：一个局中人 $i$，不管他是否参加到一个联盟中去，如果最后分配给他的数额 $x_i$ 还达不到他一个人单干所能得到的收入，很难想像他会接受这样的分配．

条件(4.10)称为**集体合理性条件**(group rationality)，或**派雷托最优性条件**(Pareto optimality)．这个条件可以这样来解释．如果

$$v(I) > \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

则$I$中全部成员可以组成大联盟$I$，得到的总收入是$v(I)$．由于

$$v(I)-\sum_{i=1}^{n}x_i>0,$$

所以每个局中人$i$可以在$x_i$以外再得到一些额外的收入，例如，每个局中人可以分得

$$\frac{1}{n}\left[v(I)-\sum_{i=1}^{n}x_i\right]>0.$$

因此，他们肯定不会接受$x$这个分配方案．另一方面，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i>v(I)$$

是不可能的，因为$v(I)$按定义是全部局中人组成大联盟$I$所能取得的最大的收入，总的分配不许可超出总的收入．由此可见，(4.10)式应当成立．

非实质性的对策只有一个转归：

**定理4.3．** 非实质性的对策只有一个转归，即

$$x=(v\{1\},\cdots,v\{n\}).\tag{4.11}$$

**证明．** 设$x=(x_1,\cdots,x_n)$是非实质性对策$\Gamma\equiv[I,v]$的一个转归．如果对于某个$i$有

$$x_i>v(\{i\}),$$

则由(4.9)，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i>\sum_{i=1}^{n}v(\{i\}).$$

但由(4.10)，上式左边等于$v(I)$；又由(4.6)，上式右边也等于$v(I)$．因此，$v(I)>v(I)$，矛盾．由此可见，对于每一个$i$，有

$$x_i=v(\{i\}),$$

所以对策只有一个转归，即

$$x=(v\{1\},\cdots,v\{n\}).$$ ■

对于实质性的对策$\Gamma\equiv[I,v]$，由于

$$a=v(I)-\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})>0,$$

有无穷多种方式将$a$分为$n$个非负的实数$a_1,\cdots,a_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a.$$

容易验证，任何形如

$$x=(v\{1\}+a_1,\cdots,v\{n\}+a_n)$$

的向量是$\Gamma$的一个转归.因此,$\Gamma$有无穷多个转归.

## 4.4. 策略等价关系和特征函数的(0,1)规范化

合作对策可以按其基本性质进行分类，使得每一类对策都具有共同的特性．我们要从对策的特征函数来考虑分类的问题．从局中人的角度来考虑，如果两个对策的特征函数在策略方面的可能性完全相同，就把这两个对策看做是等价的，同时把两个特征函数也看做是等价的．这种等价关系称为策略等价关系．将全体特征函数划分为策略等价类后，从每一类中选出一个最简单的特征函数作为这一类的代表.这样,对整个一类对策或特征函数的研究,就可以简化为对这个代表的研究.

**定义1.** 设$\Gamma\equiv[I,v]$和$\Gamma'\equiv[I,v']$是定义在同一个$I=\{1,\cdots,n\}$上的两个合作$n$人对策．如果存在$n$个常数$a_1,\cdots,a_n$和一个正的常数$c$,使得对于$I$的每一个子集$S$有

$$v'(S)=cv(S)+\sum_{i\in S}a_i, \tag{4.12}$$

则称$\Gamma$和$\Gamma'$是策略等价的,或者说,特征函数$v$和$v'$是策略等价的.

下面我们来证明，这样定义的策略等价关系满足等价关系的三个条件，即：自反性、对称性和可递性.我们以记号“$v\sim v'$”表示$v$和$v'$策略等价.

(1)自反性．每一个特征函数$v$同它本身策略等价，即

$$v\sim v.$$

在(4.12)中取 $c=1$，$a_i=0$，$i=1,\cdots,n$，就证明了这一性质.

（2）对称性. 如果$v\sim v'$，则$v'\sim v$.

设$v\sim v'$，即

$$v'(S)=cv(S)+\sum_{i\in S}a_i.$$

解出$v(S)$，得

$$v(S)=\frac{1}{c}v'(S)+\sum_{i\in S}\left(-\frac{a_i}{c}\right).$$

因为$\frac{1}{c}>0$，$-\frac{a_i}{c}(i=1,\cdots,n)$都是常数，上式就是$v'\sim v$的定义.

（3）可递性. 如果$v\sim v'$，$v'\sim v''$，则$v\sim v''$.

因为$v\sim v'$，所以

$$v'(S)=cv(S)+\sum_{i\in S}a_i \qquad (c>0). \tag{4.12}$$

因为$v'\sim v''$，所以

$$v''(S)=c'v'(S)+\sum_{i\in S}a_i' \qquad (c'>0). \tag{4.13}$$

将(4.12)代入(4.13)，得到

$$v''(S)=c'cv(S)+\sum_{i\in S}(a_i'+c'a_i).$$

由于$c'c>0$，$(a_i'+c'a_i)$是$n$个常数，上式就是$v\sim v''$的定义.

有了策略等价的概念，我们就可以在特征函数的每一个策略等价类中选出一个代表，这个代表具有同一等价类中每个成员所共有的特性. 为此，我们引进下面的概念.

定义2. 合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的特征函数$v$如果满足下面两个条件：

$$v(\{i\})=0, \qquad i=1,\cdots,n, \tag{4.14}$$

$$v(I)=1, \tag{4.15}$$

则称Γ或 $v$ 是(0,1)规范化的.

**定理4.4.** 每一个实质性的合作$n$人对策$\Gamma=[I,v]$策略等价于唯一的一个(0,1)规范化对策.

**证明.** 要使得$v'$是同$v$策略等价的(0,1)规范化特征函数,应当证明,存在常数$c>0$和$n$个常数$a_i$, $i=1,\cdots,n$,满足

$$v'(\{i\})=cv(\{i\})+a_i=0,\quad i=1,\cdots,n, \tag{4.16}$$

$$v'(I)=cv(I)+\sum_{i=1}^{n}a_i=1. \tag{4.17}$$

将(4.16)中 $n$ 个等式相加,得到

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=-c\sum_{i=1}^{n}v(\{i\}).$$

代入(4.17)式:

$$cv(I)-c\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})=1.$$

由假设,对策是实质性的,所以

$$v(I)-\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})>0.$$

因此,

$$c=\frac{1}{v(I)-\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})}>0. \tag{4.18}$$

代入(4.16)式,有

$$a_i=-cv(\{i\})=\frac{-v(\{i\})}{v(I)-\sum_{i=1}^{n}v(\{i\})}. \tag{4.19}$$

(4.18)和(4.19)是方程组(4.16),(4.17)的唯一解.因此,与 $v$ 策略等价的(0,1)规范化特征函数 $v'$ 是唯一确定的. ■

对于(0,1)规范化的合作$n$人对策,转归

$$x=(x_1,\cdots,x_n) \tag{4.8}$$

应满足的条件(4.9)和(4.10)变为

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\cdots,n, \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{4.21}$$

全体转归的集是 $n$ 维空间里的 $n-1$ 维单纯形.

由定理4.4可知,对于固定的$I$,合作对策的每一个策略等价类可以由其(0,1)规范化对策作为代表,它具有整个一类对策的共同特性. 因此，对于每一个策略等价类，我们只须研究它的这个代表就行了.

例2. 合作 6 人对策的特征函数 $v$ 的值是( $|S|$ 是联盟 $S$中的局中人数)：

$$\begin{array}{ll} v(S)=1, & \text{若 } |S|=1, \\ v(S)=3, & \text{若 } |S|=2, \\ v(S)=5, & \text{若 } |S|=3, \\ v(S)=7, & \text{若 } |S|=4, \\ v(S)=10, & \text{若 } |S|=5, \\ v(I)=12. & \end{array}$$

把这个特征函数化为(0,1)规范化形式.

按照(4.18) 和 (4.19) 式计算 $c$ 和 $a_i$，我们有

$$c=\frac{1}{v(I)-\sum_{i=1}^{6} v(\{i\})}=\frac{1}{12-6}=\frac{1}{6}.$$

$$a_i=-cv(\{i\})=-\frac{1}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}, \quad i=1,\cdots,6$$

代入(4.12)式，得到

$$v'(S)=0, \qquad \text{若 } |S|=1,$$

$$v'(S)=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}, \qquad \text{若 } |S|=2,$$

$$v'(S)=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6},\qquad 若\ |S|=3,$$

$$v'(S)=\frac{7}{6}-\frac{4}{6}=\frac{3}{6},\qquad 若\ |S|=4,$$

$$v'(S)=\frac{10}{6}-\frac{5}{6}=\frac{5}{6},\qquad 若\ |S|=5,$$

$$v'(I)=1.$$

在原来的对策里，转归 $x=(x_1,\cdots,x_6)$ 满足下列条件：

$$x_i\geqslant 1,\quad i=1,\cdots,6,$$

$$x_1+\cdots+x_6=12.$$

特征函数 $v$ 化为(0,1)规范化特征函数$v'$后，转归是满足条件

$$x'_i\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,6,$$

$$x'_1+\cdots+x'_6=1$$

的全体向量 $x'=(x'_1,\cdots,x'_6)$ 的集.

对于合作$n$人对策，除了以上所述的(0,1)规范化形式外，有时也需要用到(-1,0)规范化形式，即，特征函数$v'(S)$满足条件

$$v'(\{i\})=-1,\quad i=1,\cdots,n,\tag{4.22}$$

$$v'(I)=0\tag{4.23}$$

的形式.

不难验证，从(0,1)规范化特征函数 $v$ 变换成(-1,0)规范化特征函数 $v'$ 的公式是

$$v'(S)=nv(S)-|S|,\tag{4.24}$$

其中$S$是$I$的任意子集.

在上面的例2中，将(0,1)规范化特征函数$v'$变换成(-1,0)规范化特征函数$v''$，结果是

$$v''(\{i\})=-1,\qquad i=1,\cdots,6,$$

$$v''(S)=-1,\qquad 若\ |S|=2,3,4,$$

$$v''(S)=0,\qquad 若\ |S|=5,$$

$$v''(I)=0.$$

定理4.4确定了一切实质性合作对策的(0,1)规范化形式．现在我们来看非实质性的合作对策．

设$\Gamma\equiv[I,v]$是一个非实质性合作$n$人对策．非实质性对策的特征函数$v$具有可加性，所以

$$v(S)=\sum_{i\in S}v(\{i\}) \tag{4.25}$$

对于一切$S\subseteq I$成立．对于每一个$S\subseteq I$，令

$$v'(S)=v(S)+\sum_{i\in S}[-v(\{i\})].$$

将上式与策略等价关系的定义(4.12)式进行对比，有

$$c=1>0,\quad a_i=-v(\{i\}),\quad i=1,\cdots,n.$$

因此，$v\sim v'$．但是，$v'(S)\equiv 0$．所以一切非实质性的对策同一个特征函数恒等于零的对策具有策略等价关系．

## 4.5. 合作二人对策

本节讨论合作二人对策的特征函数．合作二人对策可以分为常和合作二人对策和非常和合作二人对策两类．

所谓常和$n$人对策，就是对于每一个局势 $s$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n}P_i(s)=k$$

的对策，其中$k$为一常数．如果我们选择 $n$ 个常数$k_i$，$i=1,\cdots,n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=k,$$

并令

$$P_i'(s)=P_i(s)-k_i,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}P_i'(s)=0.$$

可见常和对策与零和对策从策略上考虑是等价的. 在同一个策略局势下，两者每个局中人的支付相差一个常数.

对于特征函数形式下的合作 $n$ 人对策，常和与零和也同样是等价的概念.

首先，关于常和对策的特征函数，我们有下面的性质.

**定理4.5.** 在合作$n$人常和对策$\Gamma\equiv[I,v]$中，对于每一个联盟$S\subseteq I$，有

$$v(S)+v(I\setminus S)=v(I). \tag{4.26}$$

**证明.** 我们有

$$v(I)=\sum_{i=1}^{n}P_i(s)=k=\sum_{i=1}^{n}E_i(x),$$

其中$k$为常数，$P_i$是局中人 $i$ 的支付函数,$E_i$是他的期望支付. 因此，对于每一个联盟$S\subseteq I$，由特征函数的定义(4.3)，

$$\begin{aligned}
v(S)&=\max_{x\in X_S}\min_{y\in X_{I\setminus S}}\sum_{i\in S}E_i(x,y)\\
&=\max_{x\in X_S}\min_{y\in X_{I/S}}\Big[k-\sum_{i\in I\setminus S}E_i(x,y)\Big]\\
&=\max_{x\in X_S}\Big(k+\min_{y\in X_{I\setminus S}}\Big[-\sum_{i\in I\setminus S}E_i(x,y)\Big]\Big)\\
&=\max_{x\in X_S}\Big[k-\max_{y\in X_{I\setminus S}}\sum_{i\in I\setminus S}E_i(x,y)\Big]\\
&=k-\min_{x\in X_S}\max_{y\in X_{I\setminus S}}\sum_{i\in I\setminus S}E_i(x,y)\\
&=k-\max_{y\in X_{I\setminus S}}\min_{x\in X_S}\sum_{i\in I\setminus S}E_i(x,y)\\
&=v(I)-v(I\setminus S).
\end{aligned}$$

由此即得(4.26)式. ■

常和对策的这一性质称为特征函数的互补性.

我们现在回到合作二人对策的讨论.

对于常和合作二人对策，如果它是实质性的对策，则根据定理4.4，它与唯一的一个(0,1)规范化对策策略等价．化为(0,1)规范化对策后，有

$$v(\{1\})=v(\{2\})=0,\quad v(\{1,2\})=1.$$

但由定理4.5，

$$v(\{1\})=v(\{1,2\})-v(\{2\})=1-0=1,$$

这与$v(\{1\})=0$相矛盾．由此可见，一切常和合作二人对策都是非实质性的．

下面再来看非常和合作二人对策．

例3．我们重新考虑一下3.3节例3中的$2\times2$双矩阵对策("夫妇爱好问题")：

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

作为非合作二人对策，我们已经看到，由于局中人1,2只能各自独立地采用混合策略，所以它的支付集合是图3.2中的域$V$．现将该图重复画出如图4.1$(a)$所示．

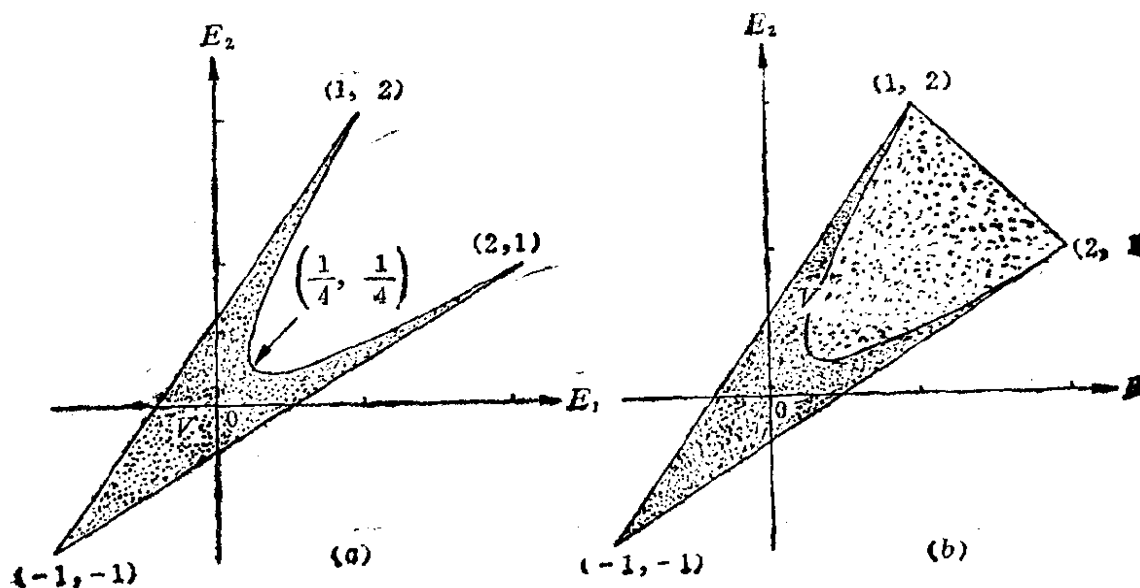



图 4.1

现在，如果把支付矩阵$A,B$所代表的对策看作是一个合作二人对策，则局中人 1 和 2 的混合策略可以结合起来，形成联合的混合策略．例如，两个局中人可以事先商定，或者两人都选择策略 1，或者都选择策略 2．要做到这一点，只要掷一枚钱币，事先规定，若钱币正面向上，则两人都选择策略 1，若反面向上，则都选择策略 2．

如果允许局中人 1，2 采用一切可能的联合混合策略，则全体支付$(E_1,E_2)$的集是图4.1(b)中的区域$V'$，它是$(-1,-1)$，$(1,2)$，$(2,1)$三点的凸包．

不难算出，这个合作二人对策的特征函数$v$的值是

$$v(\{1\})=v(\{2\})=\frac{1}{5},\quad v(\{1,2\})=3.$$

例4．3.3节例 4 “囚犯的难题”的支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 10 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}8 & 10\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

作为非合作二人对策，它只有一个平衡点$x=0$，$y=0$，也就是两个局中人同时选择第二个纯策略．如果把$A,B$看作是一个合作二人对策的支付矩阵，则情形就完全不同了．两个局中人可以事先交换情报，可以预先约定采取某个纯策略或某个联合混合策略，也可以对两人所得支付的总额进行再分配．我们现在按照定义(4.3)来求这个合作二人对策的特征函数．

按照4.1节例 1 的方法进行计算，以Ⅰ，Ⅱ分别表示每个局中人第一和第二个纯策略，列表如下：

| | | {2} Ⅰ | {2} Ⅱ |
|---|---|---|---|
| {1} | Ⅰ | 8 | 0 |
| | Ⅱ | 10 | 2 |

容易看出，$v(\{1\})=2$.

其次

| | | $\{1\}$ | |
|---|---|---|---|
| | | Ⅰ | Ⅱ |
| $\{2\}$ | Ⅰ | 8 | 0 |
| | Ⅱ | 10 | 2 |

应当注意的是，这里以$\{2\}$作为第一个局中人$S$，以$\{1\}$作为第二个局中人$I\setminus S$，所以这里的支付矩阵是原来的支付矩阵$B$的转置. 因此，$v(\{2\})=2$.

我们得到特征函数$v$的值如下：

$$v(\{1\})=v(\{2\})=2, \quad v(\{1,2\})=16.$$

最后，我们指出，任何一个实质性的（因而不是常和的）合作二人对策都策略等价于唯一的一个(0,1)规范化对策，其特征函数是

$$v(\{1\})=v(\{2\})=0,$$
$$v(\{1,2\})=1.$$

上面两个例子里的合作二人对策都可以化为这种与之策略等价的形式.

## 4.6. 转归之间的优超关系. 合作三人对策

定义1. 设$x=(x_1,\cdots,x_n)$和$y=(y_1,\cdots,y_n)$是合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的两个转归，联盟$S$是$I$的非空子集. 如果

$$v(S)\geqslant\sum_{i\in S}y_i, \tag{4.27}$$

且

$$y_i>x_i, \quad i\in S, \tag{4.28}$$

则称$y$关于$S$优超于$x$($y$ dominates $x$ with respect to $S$),或者说，$x$关于$S$被$y$优超，记为

$$y \succ_S x. \tag{4.29}$$

(4.27) 称为**可行性或有效性**(effectiveness) 条件.或者说，$S$是对于$y$的有效集. 如果这个条件不成立，即

$$v(S) < \sum_{i \in S} y_i,$$

则因$v(S)$是联盟$S$能够保证得到的最大收入，所以$S$的成员不一定能实现转归$y$应允给予他们的分配，因此就谈不上优超与否的问题.

条件(4.28)表明,对于$S$中每一个成员$i$来说转归$y$比$x$好，$S$中所有的成员都将选择$y$而不愿选择$x$.

一个转归关于某个联盟优超于另一个转归的概念满足可递性. 这就是说，如果$z \succ_S y$，$y \succ_S x$，则$z \succ_S x$.

证明如下：因为$z \succ_S y$，所以

$$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} z_i, \tag{4.30}$$

$$z_i > y_i, \quad i \in S. \tag{4.31}$$

又因$y \succ_S x$，所以

$$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i, \tag{4.32}$$

$$y_i > x_i, \quad i \in S. \tag{4.33}$$

结合 (4.30)，(4.31)，(4.33) 即得

$$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} z_i,$$

$$z_i > x_i, \quad i \in S.$$

因此，$z \succ_S x$.

关于单人联盟不可能有转归的优超关系.这是因为，如果$y \succ_{\{i\}} x$，则由定义，

$$v(\{i\}) \geqslant y_i,$$
$$y_i > x_i.$$

于是有

$$v(\{i\}) \geqslant y_i > x_i.$$

$x_i$破坏了转归的定义（4.9）.

关于全体局中人的大联盟$I$也不可能有转归的优超关系. 这是因为，如果$y \succ_I x$，则

$$v(I) \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i,$$
$$y_i > x_i, \quad i \in I.$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n} y_i > \sum_{i=1}^{n} x_i = v(I).$$

$y$破坏了转归的定义（4.10）.

**定义2.** 如果存在一个非空联盟$S \subset I$使得

$$y \succ_S x, \tag{4.34}$$

则称转归$y$优超于转归$x$，记为

$$y \succ x. \tag{4.35}$$

转归的一般优超关系不一定满足可递性，举例如下.

设合作三人对策的特征函数$v$的值是

$$v(\{i\}) = 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(I) = 10.$$

考虑下面三个转归：

$$z = (0, 5, 5),$$
$$y = (6, 4, 0),$$
$$x = (4, 0, 6).$$

我们有

$$z \succ y, \qquad y \succ x,$$

但$z$不优超于$x$.

**定义3.** 设$S\subset I$，$y$是一个转归，定义

$$\mathrm{Dom}_S y=\{x: y\succ_S x\},\tag{4.36}$$

称为转归$y$关于联盟$S$的优超域（dominion）.并定义

$$\mathrm{Dom}\, y=\bigcup_{\substack{S\subset I\\ S\neq\phi}}\mathrm{Dom}_S y,\tag{4.37}$$

称为转归$y$的优超域.

设$X$是全部转归的集.对于任意的集$A\subset X$，定义

$$\mathrm{Dom}_S A=\bigcup_{y\in A}\mathrm{Dom}_S y,\tag{4.38}$$

称为转归集$A$关于联盟$S$的优超域.并定义

$$\mathrm{Dom}A=\bigcup_{\substack{S\subset I\\ S\neq\phi}}\mathrm{Dom}_S A,\tag{4.39}$$

称为转归集$A$的优超域.

我们现在来讨论合作三人对策的转归的优超关系.

由于非实质性的合作对策只有唯一的一个转归（见4.4节例3），而且这种对策策略等价于特征函数恒等于零的对策(见4.4节末)，所以不存在优超的问题.我们假定所讨论的合作三人对策都是实质性的，并假定对策的特征函数$v$已简化为（0,1）规范化的形式.

三人对策的转归集$X$的点$x$可以用平面上高为1的正三角形中重心坐标为（$x_1,x_2,x_3$）的全部点来表示，其中$x_1$，$x_2$，$x_3$满足条件

$$x_i\geqslant 0,\qquad i=1,2,3,$$
$$x_1+x_2+x_3=1.$$

这个集就是第一章1.12节中的$S_3$.

首先，对于实质性的常和合作三人对策$\Gamma\equiv[I,v]$，我们有

$$v(\{i\})=0,\qquad i=1,2,3,$$
$$v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=v(I)=1.$$

这可从上节定理4.5所述的互补性（4.26）直接推得.

设$y=(y_1,y_2,y_3)$是$X$中的一点.先考虑联盟$\{1,2\}$.我们

知道，

$$y \succ_{\{1,2\}} x$$

的定义是

$$v(\{1,2\}) = 1 \geqslant y_1 + y_2,$$

$$y_1 > x_1, \qquad y_2 > x_2.$$

因此，在图4.2中，转归$y$关于联盟{1，2}的优超域是

$$\text{Dom}_{\{1,2\}} y = yb3c,$$

不包括$yb$和$cy$；

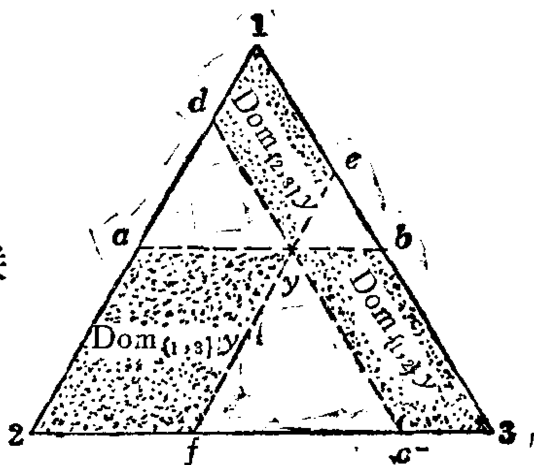



图 4.2

类似地，有

$$\text{Dom}_{\{1,2\}} y = yf2a, \qquad \text{不包括} yf \text{和} ay,$$

$$\text{Dom}_{\{2,3\}} y = yd1e, \qquad \text{不包括} yd \text{和} ey.$$

根据（4.37）式，$y$的优超域是

$$\text{Dom}\ y = (\text{Dom}_{\{1,2\}} y) \cup (\text{Dom}_{\{1,3\}} y) \cup \text{Dom}_{\{2,3\}} y),$$

就是图中的三个阴影部分．图中无阴影部分的三个三角形（包括三角形的边界）是不被转归$y$优超的区域，它等于

$$X \setminus \text{Dom}\, y.$$

下面再来讨论非常和合作三人对策转归的优超关系．

一般（非常和）合作三人对策$\Gamma \equiv [I, v]$在(0,1)规范化形式下特征函数$v$的值是

$$v(\{i\}) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$v(I) = 1,$$

$$v(\{1,2\}) = c_3, \qquad v(\{1,3\}) = c_2, \qquad v(\{2,3\}) = c_1,$$

其中$c_1$，$c_2$，$c_3$都是[0,1]中的常数．

我们知道，关于单人联盟$\{i\}$和全体局中人的联盟$I$都不存在转归的优超关系．因此，只可能有关于{1,2}，{1,3}，{2,3}的优超关系．

先看关于联盟{1,2}的优超关系

$$y \succ_{\{1,2\}} x, \tag{4.40}$$

其中$x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$是$X$中的转归.由定义，

$$v(\{1,2\})=c_3\geqslant y_1+y_2, \tag{4.41}$$

$$y_1>x_1,\quad y_2>x_2. \tag{4.42}$$

可行性条件可以改写成

$$y_3\geqslant 1-c_3. \tag{4.43}$$

上式表示点$y$应位于直线$y_3=1-c_3$上或在其右侧，见图4.3.

类似地，由关于联盟$\{1,3\}$和$\{2,3\}$的优超关系

$$y\succ_{\{1,3\}}x,$$

$$y\succ_{\{2,3\}}x$$

分别有

$$y_2\geqslant 1-c_2, \tag{4.44}$$

$$y_1\geqslant 1-c_1. \tag{4.45}$$

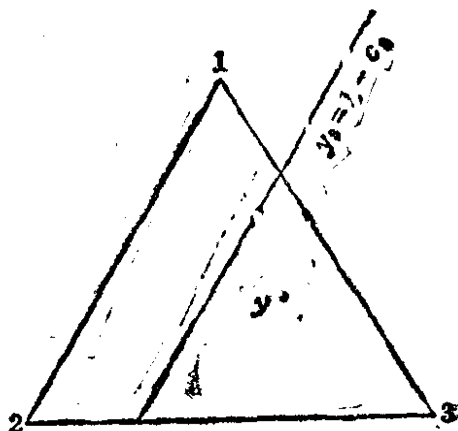



图 4.3

上面第一式（4.44)表示点$y$应在直线$y_2=1-c_2$上或在其左侧，第二式（4.45）表示点$y$应在直线$y_1=1-c_1$上或在其上方.见图4.4.

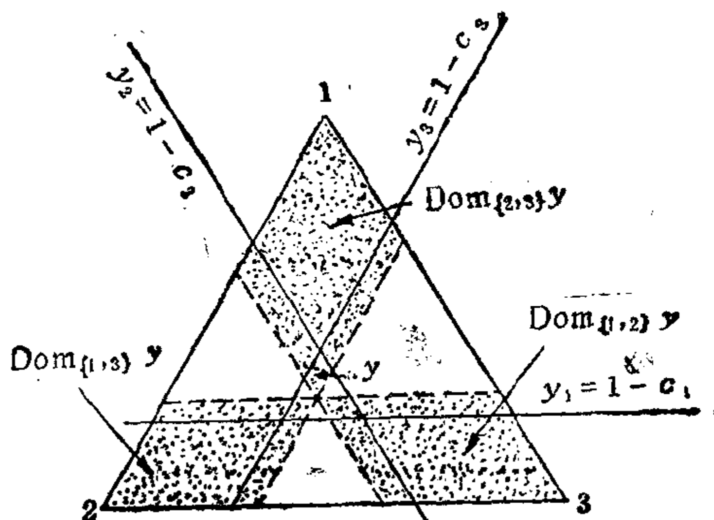



图4.4

一个转归$y$如果满足条件（4.43）—（4.45），则它的优超域是图4.4中的阴影部分，是三个平行四边形.这同图4.2的情况相同.

如果$y$满足条件（4.45），但不满足条件（4.43）和(4.44)，则$y$的优超域Dom $y$如图4.5中所示.

又如$c_1$，$c_2$，$c_3$的值使得三条直线

$$y_1 = 1 - c_1,$$

$$y_2 = 1 - c_2,$$

$$y_3 = 1 - c_3$$

和点$y$的位置如图4.6所示，则$y$的优超域是图中的两个平行四边形.

其他的情况可以类似地画出，这里不再一一列举.

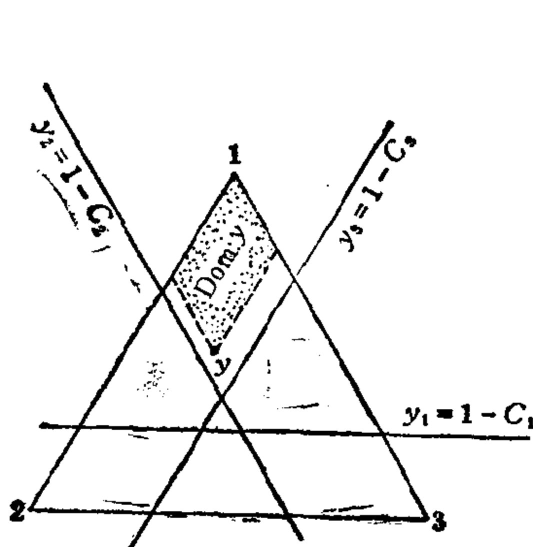



图 4.5

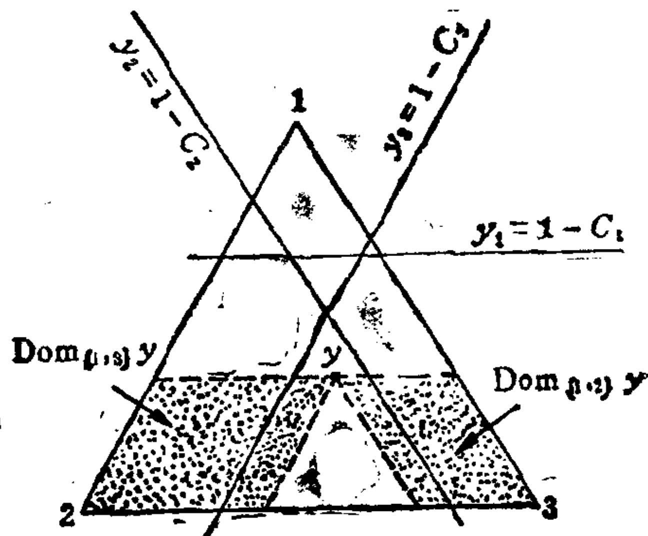



图 4.6

## 4.7. 合作n人对策的核心

从本节起，我们要介绍一些关于合作$n$人对策的解的概念.设$\Gamma\equiv[I,v]$是一个合作$n$人对策，其中$I=\{1,\cdots,n\}$，特征函数$v$是定义在$I$的一切子集类上的实值函数.直观地说，我们希望在全体转

归的集$X$中找出一些转归，这些转归能够被参加到各个联盟或合伙$S$中的各个局中人所接受.如果存在唯一的一个转归$x\in X$，它能够让每一个局中人$i$都感到满意，则这个转归就可以作为所考虑的对策的解.例如，在上节所讨论的实质性合作三人对策中,如果有一个转归$x$，它优超于任何其他转归,又不被任何其他转归所优超，这就是说，没有一个联盟$S$能够提出对自己更有利的转归，那么，这个转归$x$就是一个受到全体局中人欢迎的理想的分配方案，就可以作为对策的解.但，不幸的是，这样的转归一般并不存在.

因此,我们寻求的将不是一个单一的转归,而是满足一定条件的一些转归所组成的集.我们将首先考虑那些不受任何其他转归优超的转归.

为了书写简洁，我们采用下列记号.设$S\neq\varnothing$是$I$中元素的一个联盟，$x=(x_1, \cdots, x_n)$是一个转归.我们记

$$x(S)=\sum_{i\in S}x_i, \qquad 若S\neq\varnothing, \tag{4.46}$$

并规定

$$x(\varnothing)=0. \tag{4.47}$$

**定义.** 设$\Gamma\equiv[I, v]$是合作$n$人对策.对于一切$S\subseteq I$,满足

$$v(S)\leqslant x(S) \tag{4.48}$$

的转归 $x$ 组成的集$C$称为$\Gamma$的核心（core）.即

$$C=\{x: x\in X; v(S)-x(S)\leqslant 0, S\subseteq I\}. \tag{4.49}$$

(4.48)式表示,对于一切联盟$S\subseteq I$,$C$中的转归$x$提供给$S$的分配不少于$S$自身所能得到的总收入$v(S)$，因而$x$是能被一切$S$接受的转归.

下面的定理表明，核心中的转归就是不被其他转归优超的那些转归.

**定理4.6.** 设$\Gamma\equiv[I,v]$是合作$n$人对策，$C$是$\Gamma$的核心.则转归$x=(x_1, \cdots, x_n)\in C$的充要条件是$x$不被优超.

**证明．** **必要性．** 我们要证明，若$x\in C$，则$x$不被优超．

假设$x$被某个转归$y=(y_1, \cdots, y_n)$优超，即$y\succ x$，则由优超的定义，存在某个$S\subset I$，使

$$v(S)\geqslant y(S)>x(S).$$

因此，$x\notin C$．

**充分性．** 现在证明，若$x$不被优超，则$x\in C$．

首先假定，特征函数$v$已简化为(0,1)规范化形式．

假设$x\notin C$，则存在联盟$S$使

$$v(S)>x(S).$$

在上式中，$S$显然不可能是单人联盟，$S$也不可能等于$I$，否则将不符合转归的定义．我们有

$$\begin{aligned}x(I\setminus S)&=x(I)-x(S)\\&=v(I)-x(S)\\&\geqslant v(S)-x(S)>0.\end{aligned}$$

我们构造一个转归$y=(y_1,\cdots,y_n)$，使得

$$y\succ_S x.$$

为此，令$\varepsilon$是满足条件

$$0<\varepsilon<\frac{1}{|S|}[v(S)-x(S)] \tag{4.50}$$

的数，并令

$$y_i=\begin{cases}x_i+\varepsilon, & 若 i\in S,\\ \dfrac{1}{n-|S|}[x(I\setminus S)-|S|\varepsilon], & 若 i\notin S.\end{cases}$$

容易验证，

$$y_i>0,\quad i=1, \cdots, n$$

[由（4.50），$v(S)-x(S)>|S|\varepsilon$，故当$i\notin S$时，

$$\begin{aligned}x(I\setminus S)-|S|\varepsilon&=x(I)-x(S)-|S|\varepsilon\\&=v(I)-x(S)-|S|\varepsilon\\&\geqslant v(S)-x(S)-|S|\varepsilon>0],\end{aligned}$$

且

$$y(I)=v(I).$$

因此，$y$是一个转归. 又因

$$v(S)>x(S)+|S|\varepsilon=y(S),$$

$$y_i>x_i,\quad i\in S,$$

所以$y\succ_S x$，$x$关于$S$被$y$优超，这就证明了定理的充分性. ■

我们知道，关于单人联盟$\{i\}$和全体局中人的大联盟$I$都不存在转归的优超关系，所以合作$n$人对策只有当$n\geqslant3$时才会有核心.

当$n\geqslant3$时，任何非实质性的对策$\Gamma\equiv[I,v]$，它的特征函数$v$具有可加性，且只有唯一的一个转归，即

$$x=(v(\{1\}),\ \cdots,\ v(\{n\})),$$

因而这个转归也可以说就是它的核心.

$n\geqslant3$的实质性对策，可以区分为常和合作$n$人对策与非常和合作$n$人对策两类. 关于前者，我们有下面的定理.

**定理4.7.** 设$\Gamma\equiv[I,v]$是实质性的常和合作$n$人对策，则对策的核心$C=\varnothing$.

**证明.** 假设$C$非空，并设$x\in C$，则由定义（4.49），对于每一个$i$，有

$$v(\{i\})\leqslant x_i,\tag{4.51}$$

$$v(I\setminus i)\leqslant x(I\setminus i).\tag{4.52}$$

将（4.51）和（4.52）两式左右两边分别相加. 由于对策是常和的，所以左边两项之和为$v(I)$. 又由转归的定义（4.10），右边两项之和也等于$v(I)$. 由此可见，（4.51）式中等号对于一切$i$成立，即

$$v(\{i\})=x_i,\quad i=1,\cdots,n.\tag{4.53}$$

由（4.53）可知，对策不是实质性的. 这就证明了$C$是空集. ■

这个定理说明了实质性合作$n$人对策（$n\geqslant3$）如果是常和的，则对策的核心是个空集.

下面我们通过例子来说明实质性非常和合作三人对策的核

心.

例5. 设合作三人对策Γ的特征函数 $v$ 的值是

$$v(\{i\}) = 0, \quad i=1,2,3,$$

$$v(\{1,2\}) = \frac{2}{3}, \quad v(\{1,3\}) = \frac{7}{12}, \quad v(\{2,3\}) = \frac{1}{2},$$

$$v(\{1,2,3\}) = 1.$$

由核心$C$的定义，转归 $x=(x_1,x_2,x_3)\in C$的充要条件是

$$v(\{1\}) = 0 \leqslant x_1,$$

$$v(\{2\}) = 0 \leqslant x_2,$$

$$v(\{3\}) = 0 \leqslant x_3,$$

$$v(\{1,2\}) = \frac{2}{3} \leqslant x_1 + x_2,$$

$$v(\{1,3\}) = \frac{7}{12} \leqslant x_1 + x_3,$$

$$v(\{2,3\}) = \frac{1}{2} \leqslant x_2 + x_3.$$

利用转归的集体合理性条件（4.10），后三个不等式可以化为

$$x_3 \leqslant \frac{1}{3},$$

$$x_2 \leqslant \frac{5}{12},$$

$$x_1 \leqslant \frac{1}{2}.$$

因此，Γ的核心是图4.7中的阴影区域，是一个三角形，包括三角形的边界.

例6. 设合作三人对策Γ的特征函数 $v$ 的值是

$$v(\{i\}) = 0, \quad i=1,2,3,$$

$$v(\{1,2\}) = \frac{1}{3}, \quad v(\{1,3\}) = \frac{1}{6}, \quad v(\{2,3\}) = \frac{5}{6},$$

$$v(\{1,2,3\}) = 1.$$

$x\in C$的条件是

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,3,$$

$$v(\{1,2\}) = \frac{1}{3} \leqslant x_1 + x_2,$$

$$v(\{1,3\}) = \frac{1}{6} \leqslant x_1 + x_3,$$

$$v(\{2,3\}) = \frac{5}{6} \leqslant x_2 + x_3.$$

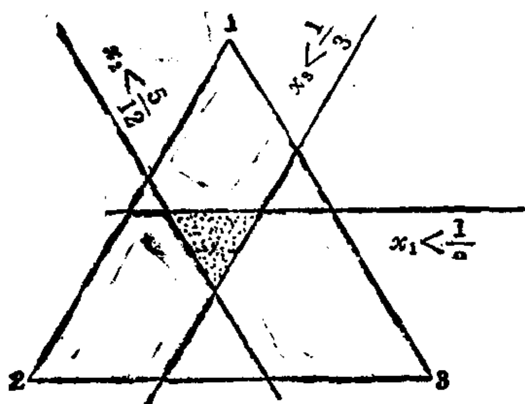



图 4.7

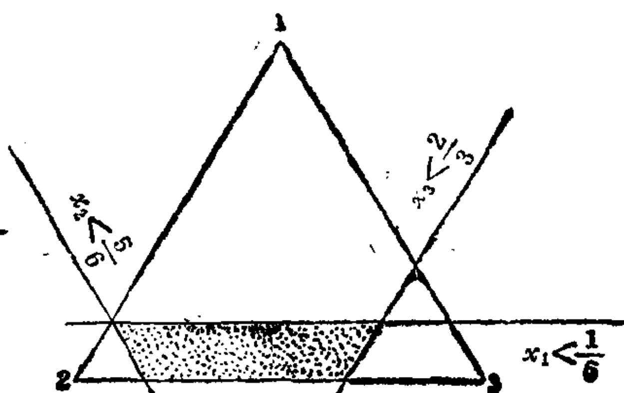



图 4.8

后三个不等式可以化为

$$x_3 \leqslant \frac{2}{3},$$

$$x_2 \leqslant \frac{5}{6},$$

$$x_1 \leqslant \frac{1}{6}.$$

因此，$\Gamma$的核心$C$是图4.8中的阴影区域，是一个四边形.

从以上两个例子不难看出，实质性非常和合作三人对策如果具有非空的核心，则这个核心可以是一个点、一个线段、一个三角形、一个四边形、一个五边形或一个六边形.

另一方面，实质性非常和合作三人对策并不一定有非空的核

心.它的核心也可能是一个空集.事实上，对于（0,1）规范化的非常和合作三人对策来说，当

$$v(\{1,2\})+v(\{1,3\})+v(\{2,3\})>2 \qquad (4.54)$$

时，对策的核心是空集.

**例7.** 合作三人对策的特征函数如果是

$$v(\{i\})=0, \quad i=1,2,3,$$

$$v(\{1,2\})=\frac{2}{3},\ v(\{1,3\})=\frac{2}{3},\ v(\{2,3\})=\frac{3}{4},$$

$$v(\{1,2,3\})=1,$$

则这个对策的核心是空集.

## 4.8. 合作n人对策的稳定集

上节讨论了核心的概念.对于一个合作$n$人对策来说，当核心非空时，核心中的转归就是不被任何其他转归优超的转归. 核心无疑是合作对策的一个重要概念.但是，如果我们企图把核心作为合作对策的解，却存在着不可克服的困难：有许多对策的核心是空集.

约·逢·诺依曼在〔19〕中提出了一种解的概念.他把解定义为一些转归构成的集$V$，其中的任何两个转归之间不存在优超关系，并且$V$以外的任何一个转归被$V$中某个转归所优超.

**定义.** 设$X$是合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的转归集；$V\subseteq X$是满足下面两个条件的转归的集：

（1）对于任意$x\in V$和$y\in V$，必有$x\not\succ y$， (4.55)

（2）如果$w\notin V$，则存在$z\in V$，使得$z\succ w$. (4.56)

我们称集$V$是对策$\Gamma$的一个**稳定集**（stable set），或称为$\Gamma$的一个**vN-M解**（von Neumann-Morgenstern solution）.

第一个条件表明，$V$中的任意两个转归是不可比较的，它们之间没有优超或被优超的关系.这一性质称为$V$的内部稳定性(inner stability).

第二个条件称为$V$的外部稳定性（external stability）．这个性质表明，不在$V$中的每一个转归$w$，至少被$V$中一个转归$z$所优超．这就是说，对于不属于$V$的任何一个转归$w$，至少有一个联盟$S$要反对它，这个联盟$S$为了自身的利益将努力争取一个分配方案$z\in V$，使得$z\succ_S w$．

每一个稳定集是合作对策的一个解，解可以有不止一个，可以有无穷多个．

合作对策的核心和稳定集之间有下面的关系．

**定理4.8．** 设合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$有非空的核心$C$，且它的$vN-M$解$V$存在，则$C\subseteq V$．

**证明．** 如果$x\in C$，则$x$不被任何转归优超．今若$x\notin V$，则必存在$y\in V$使$y\succ x$．这与$x$不被优超相矛盾，因此，$x\in V$． ∎

非实质性的合作对策只有唯一的一个转归，所以下面我们要讨论的是实质性的合作对策．同上节讨论核心的程序一样，我们首先考虑常和合作三人对策，然后再考虑非常和合作三人对策．

设$\Gamma\equiv[I,v]$是实质性的常和合作三人对策，并设对策的特征函数$v$已简化为（0,1）规范化形式．这时，必有

$$v(\{i\})=0,\quad i=1,2,3,$$
$$v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=1,$$
$$v(\{1,2,3\})=1.$$

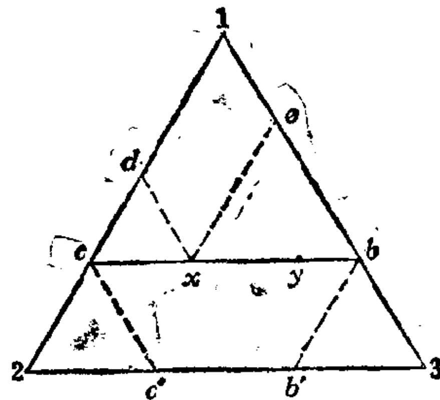


图 4.9

容易看出，在图4.9所画出的三角形的重心坐标中，平行于三角形一个边的一条直线，例如平行于边23的直线段$bc$，它上面的点所代表的转归，具有以下两个性质：

（1）若$x$，$y$是$bc$上任意两点，则$x$和$y$互不优超．

（2）由于

$$\mathrm{Dom}_{\{2,3\}}x=xd1e,\qquad \text{不包括}xd\text{和}xe,$$

令$x$在$\overline{bc}$上变动，我们得到

$$\mathrm{Dom}_{\{2,3\}}bc = \text{三角形}bc1, \quad \text{不包括}bc.$$

又，

$$\mathrm{Dom}_{\{1,3\}}b = bb'2c, \quad \text{不包括}bb'\text{和}bc,$$

$$\mathrm{Dom}_{\{1,2\}}c = cb3c', \quad \text{不包括}cc'\text{和}bc.$$

因此，

$$\mathrm{Dom}\ bc = X \setminus bc,$$

即三角形1 2 3中除线段$bc$以外的每一点必被$bc$上某一点优超.

应当注意的是，要使得

$$(\mathrm{Dom}_{\{1,3\}}b) \cup (\mathrm{Dom}_{\{1,2\}}c) = b3\,2c \setminus bc,$$

必须且只须$bc$位于 1 2,1 3 两边中点连线的下方.这就是说，如果$bc$的方程是$x_1 = k$,则$0 \leqslant k < \frac{1}{2}$.在这一条件下，上面所讨论的平行于三角形的一边 2 3 的线段$bc$按定义是对策Γ的一个稳定集，也就是Γ的一个$vN$-$M$解.

由于$k$是小于$\frac{1}{2}$的任何非负实数,所以这种平行于边2 3的直线段有无穷多条，因而Γ的这一类$vN$-$M$解有无穷多个.

同理,平行于三角形的边1 2或1 3且分别位于另二边中点连线左边或右边的直线段也代表Γ的$vN$-$M$解.这两类的解也都有无穷多个.

上面的（1）就是$vN$-$M$解的内部稳定性，（2）就是外部稳定性.

除了以上所述平行于转归三角形一边的直线段外，常和合作三人对策还有另外一个稳定集，就是转归三角形三条边的三个中点组成的集$\{a,b,c\}$,见图4.10. $a,b,c$三点构成的集确为Γ的一个$vN$-$M$解，这可由定义来加以验证.

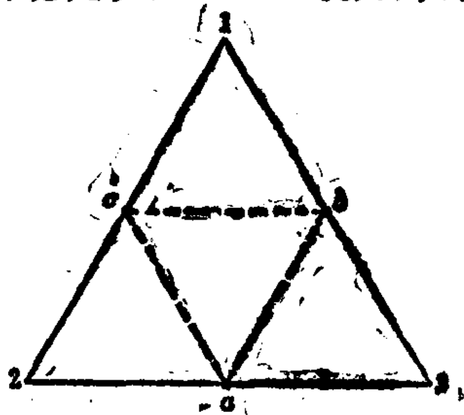



图 4.10

（1）内部稳定性：$a,b,c$三点中任何二点之间没有优超关系.

（2）外部稳定性：我们有

$$\text{Dom}\{a,b,c\} = (\text{Dom}\ a) \cup (\text{Dom}\ b) \cup (\text{Dom}\ c),$$

其中

$$\text{Dom}\ a = (ab1c) \setminus \{ab,ca\},$$
$$\text{Dom}\ b = (bc2a) \setminus \{bc,ab\},$$
$$\text{Dom}\ c = (ca3b) \setminus \{ca,bc\}.$$

但

$$\text{Dom}\ a \supset (bc \setminus \{b,c\}),$$
$$\text{Dom}\ b \supset (ca \setminus \{c,a\}),$$
$$\text{Dom}\ c \supset (ab \setminus \{a,b\}).$$

所以

$$\text{Dom}\{a,b,c\} = X \setminus \{a,b,c\}.$$

这就说明了转归三角形中除了$a,b,c$三点以外的每一点至少被$a,b,c$三点之一优超.

因此，

$$a=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad b=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\quad c=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

这三个转归构成对策$\Gamma$的一个$vN$-$M$解，这个解称为$\Gamma$的对称解.前一种类型的解则称为有差别待遇的解 (discriminatory solution).得到常数$k$ $\left(0\leqslant k<\frac{1}{2}\right)$的那个局中人称为受到差别待遇的局中人.

以上分析了实质性常和合作三人对策的$vN$-$M$解.原始的详细讨论可参看[19]285-288页（中译本第249-251页）.

以下我们来考虑实质性的非常和合作三人对策$\Gamma\equiv[I,v]$.

特征函数$v$的值是

$$v(\{i\})=0,\quad i=1,2,3,$$

$$v(\{1,2\})=c_3,$$
$$v(\{1,3\})=c_2,$$
$$v(\{2,3\})=c_1,$$
$$v(\{1,2,3\})=1,$$

其中$c_1$，$c_2$，$c_3$都是区间[0,1]中的实数.

根据核心$C$的定义（4.49），容易看出，转归$x=(x_1,x_2,x_3)\in C$的充要条件是

$$v(\{1,2\})+v(\{1,3\})+v(\{2,3\})=c_1+c_2+c_3\leqslant 2. \qquad (4.57)$$

因而核心为空集的充要条件是

$$v(\{1,2\})+v(\{1,3\})+v(\{2,3\})=c_1+c_2+c_3>2; \qquad (4.58)$$

这一条件我们曾在4.7节末例4.7的前面提到过.

我们现在先讨论$C\neq\varnothing$的情形．这时（4.57）式成立．我们在4.7节中已经看到，对策$\Gamma$的核心可以是一个点、一个直线段、一个三角形、一个四边形、一个五边形或一个六边形．设$\Gamma$的核心$C$如图4.11所示．$C$中的点是不被任何转归优超的点.

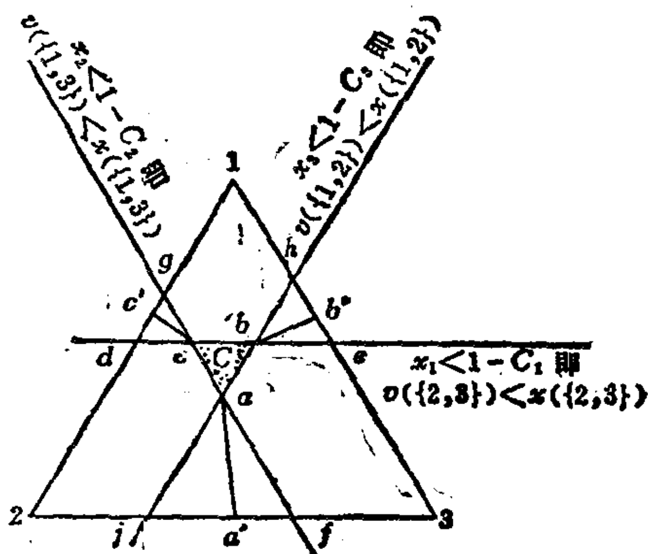



图 4.11

根据转归之间优超关系的可行性条件（4.27），关于联盟{1,2}，核心$C$中只有线段$ab$上的点满足（4.27），这时

$$v(\{1,2\})=x(\{1,2\}).$$

$ab$关于联盟{1,2}的优超域是

$$\text{Dom}_{\{1,2\}}ab=abe3fa，\text{不包含 } af,be.$$

同理，

$\mathrm{Dom}_{\{1,3\}}ca = caj2dc$，不包含 $cd, aj$，

$\mathrm{Dom}_{\{2,3\}}bc = bcg1hb$，不包含 $bh, cg$.

由此可见，$C$ 中任何两点之间不存在优超关系.$C$ 的边界 $ab$，$bc$，$ca$ 上的点优超于三个五边形内部的全部点.而三个三角形 $afj$，$bhe$，$cdg$ 包括其边界的全部点不被 $C$ 的边界上的点优超. $C$ 的内部点则关于任何二人联盟不满足优超的可行性条件.

试考察 $afj$ 这个三角形. 它是一个不被 $C$ 中点优超的转归的集，$C$ 中的点也不被它的点优超.

我们从点 $a$ 到三角形的对边 $fj$ 上任一点 $a'$ 作一条连线 $aa'$，则 $aa'$ 上任意两点互不优超. 这是因为，关于联盟 $\{2,3\}$，$aa'$ 上的点不满足优超的可行性条件；而关于联盟 $\{1,2\}$，虽然可行性条件成立，但若

$$x = (x_1, x_2, x_3), \qquad x' = (x_1', x_2', x_3')$$

是 $aa'$ 上的两点，则或者是

$$x_1 > x_1', \qquad x_2 \leqslant x_2',$$

或者是

$$x_1 < x_1', \qquad x_2 \geqslant x_2'.$$

关于联盟 $\{1,3\}$，情况也一样.

再设 $x$ 是 $aa'$ 上的一点，见图 4.12.则

$\mathrm{Dom}_{\{1,2\}}x = xq3s$,

$\mathrm{Dom}_{\{1,3\}}x = xr2p$.

令 $x$ 沿 $aa'$ 从 $a$ 变到 $a'$，可知 $\mathrm{Dom}\ aa'$ 包含整个三角形 $afj$.

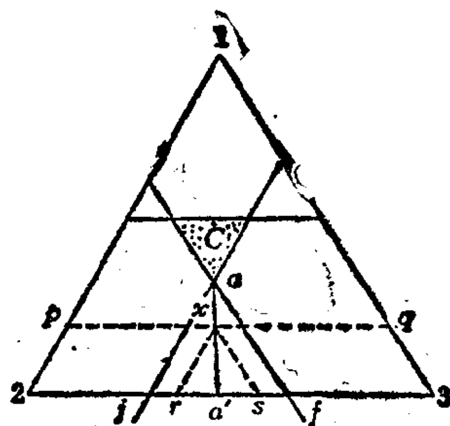


图 4.12

同理，从三角形 $C$ 的另外两个顶点 $b$，$c$ 分别向小三角形 $bhe$，$cdg$ 的对边上任一点 $b'$，$c'$ 各作一条连线 $bb'$ 和 $cc'$，见图4.11，则 $\mathrm{Dom}bb'$ 包含整个小三角形 $bhe$，$\mathrm{Dom}cc'$ 包含整个小三角形 $cdg$（以上除 $aa', bb', cc'$）.

综上所述，我们得到对策 $\Gamma$ 的一个 $vN$-$M$解：

$$V=C\cup aa'\cup bb'\cup cc'.$$

这就是说，当非常和合作三人对策 $\Gamma$ 的核心 $C\neq\varnothing$时，根据定理4.8，有$C\subseteq V$. 如果核心 $C$ 的图形如图 4.11 中所示，则我们除 $C$ 以外再加上三条直线段$aa'$，$bb'$，$cc'$，就得到 $\Gamma$ 的一个解$V$.

如果 $\Gamma$ 的核心不是一个三角形，例如

$$x_2=1-c_2$$

和

$$x_3=1-c_3$$

的交点 $a$ 位于转归三角形 $X$以外，如图 4.13 所示，这时 $C$ 是一个四边形，原来不被优超的三角形 $afj$ 消失了. 只须把核心 $C$加上两条直线段就可以得到 $\Gamma$ 的一个解.

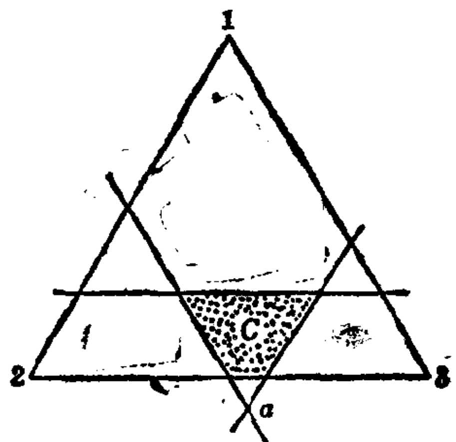


图 4.13

其他的情形与此类似，不再列举.

以上讨论的是具有非空核心的实质性非常和合作三人对策. 下面再来讨论核心为空集的实质性非常和合作三人对策的$vN$-$M$解.

仍设对策 $\Gamma$ 的特征函数 $v$为

$$v(\{i\})=0,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$
$$v(\{1,2\})=c_3,$$
$$v(\{1,3\})=c_2,$$
$$v(\{2,3\})=c_1,$$
$$v(\{1,2,3\})=1.$$

前面已经提到，核心 $C=\varnothing$的充要条件是（4.58）式即

$$c_1+c_2+c_3>2$$

成立. 这时，转归三角形 $X$ 和直线

$$x_1=1-c_1\ (\text{即}\ v(\{2,3\})=x(\{2,3\})),$$

$$x_2 = 1 - c_2 \text{（即 } v(\{1,3\}) = x(\{1,3\})\text{），}$$
$$x_3 = 1 - c_3 \text{（即 } v(\{1,2\}) = x(\{1,2\})\text{）}$$

的位置如图 4.14 所示.

小三角形 $abc$ 中没有一个点被它以外的任何点所优超. 并且 $abc$ 中的点关于三个联盟{1,2}，{1,3}，{2,3}都满足优超关系的可行性条件（4.27）. 因此，我们也可以像前面讨论常和合作三人对策那样，考虑小三角形 $abc$ 中平行于 $bc$ 边的一个线段 $de$，它具有下列性质：

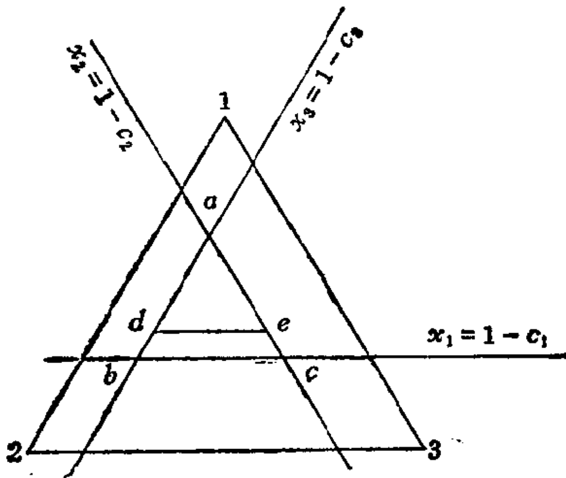


图 4.14

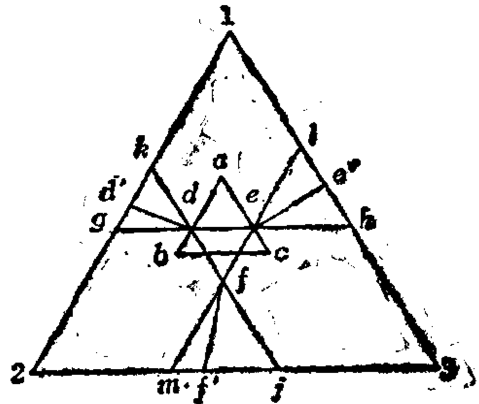


图 4.15

（1）$de$ 上任意两点所代表的转归互不优超.

（2）线段 $de$ 上的点关于各个二人联盟的优超域是（见图 4.15）

$$\mathrm{Dom}_{\{1,2\}}de = dh3j,$$
$$\mathrm{Dom}_{\{1,3\}}de = em2g,$$
$$\mathrm{Dom}_{\{2,3\}}de = del1kd.$$

我们得到不被 $de$ 优超的域是

$$fjm \cup elh \cup dgk.$$

在三个小三角形 $fjm$，$elh$，$dgk$ 中各加上一条直线段 $ff'$，$ee'$，$dd'$，则 $de$ 和这三个直线段构成一个 $vN$-$M$解$V$：

$$V = de \cup ff' \cup ee' \cup dd'.$$

最后，我们考虑小三角形 $abc$ 三边的三个中点$d$，$e$，$f$. 这三个点互不优超，它们的优超域是（见图4.16）

$$\mathrm{Dom}_{\{1,2\}} d = dk\ 1l,$$

$$\mathrm{Dom}_{\{1,3\}} e = em\ 2g,$$

$$\mathrm{Dom}_{\{2,3\}} f = fh\ 3j.$$

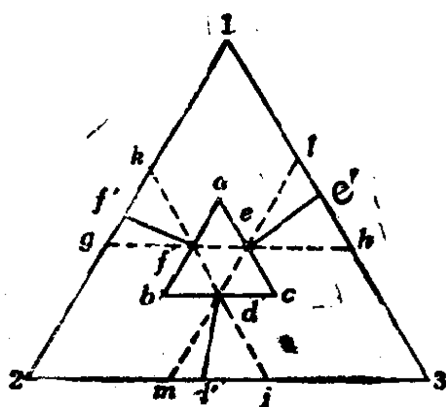



图 4,16

我们在三个不被$\{d,e,f\}$优超的三角形$djm$，$elh$，$fgk$中各加上一条直线段$dd'$，$ee'$，$ff'$，则这三个直线段（包含其端点）也构成一个 $vN$-$M$解$V$：

$$V = dd' \cup ee' \cup ff'.$$

以上关于非常和合作三人对策 $vN$-$M$解的详细讨论可参看[19] 406-415 页（中译本第 357-366 页）

## 4.9. 广义转归与强$\varepsilon$核心

为了后面几节讨论的需要，我们要引进一些新的概念。

首先，我们要重新给合作 $n$ 人对策一个定义.

**定义1.** 我们称$\Gamma \equiv [I, v]$为合作 $n$ 人对策，其中 $I = \{1, \cdots, n\}$，$v$ 是定义在 $I$ 的一切子集类上的实值函数，满足条件

$$v(\varnothing) = 0, \tag{4.59}$$

$$v(I) \geqslant \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}). \tag{4.60}$$

这个定义与 4.1 节中的定义形式上完全相同. 但在这里，我们不再把 $v(S)$看作是 $S$ 和 $I \setminus S$之间的零和二人对策的值. 这就是说，当 $I$ 中的一些成员组成联盟 $S$ 后，我们并不认为余下的成员将联合成为一个整体 $I \setminus S$ 来对付 $S$. 在这种情形下，我们就不能用 4.2 节中的（4.3）式来作为 $v(S)$的定义.

定义 1 中的特征函数 $v$ 纯粹是一个集函数，只规定它满足

(4.59)，(4.60) 两个条件．当然，在 (4.60) 中，主要的是成立严格不等号的情形．

基于上面所说的理由，4.2 节定理 4.1 中关于超可加性的条件 (4.4) 不再能保证成立．我们今后讨论的将都是这种新的意义下的合作 $n$ 人对策，也可以说是比前面更加广义的合作 $n$ 人对策．此外，局外支付的条件当然仍成立；参看 4.1 节．

我们在 4.3 节中对于合作 $n$ 人对策 $\Gamma$ 定义的转归（或分配，或支付）是一个 $n$ 维向量

$$x=(x_1,\cdots,x_n), \tag{4.8}$$

它满足个体合理性条件

$$x_i\geqslant v(\{i\}),\quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{4.9}$$

和集体合理性或派雷托最优性条件

$$x(I)=v(I). \tag{4.10}$$

我们还把全体转归的集记为 $X$.

现在，我们把这一概念加以推广，将满足条件 (4.10) 即 $x(I)=v(I)$ 而不一定属于 $X$ 的 $n$ 维向量 $x$ 都称为**广义转归** (pre-imputation)．这就是说，(4.8) 中的向量 $x$ 只满足条件 (4.10)，不一定满足条件 (4.9)．我们把全体广义转归的集记为 $X^*$.

**定义2.** 设 $\Gamma\equiv[I,v]$ 是合作 $n$ 人对策．对于每一个广义转归 $x\in X^*$ 和每一个联盟 $S\subseteq I$，定义

$$e(S,x)=v(S)-x(S), \tag{4.61}$$

称为 $S$ 在 $x$ 处的**超出值** (excess)．

$e(S,x)$ 表示 $I$ 中一些成员组成联盟 $S$ 后，$v(S)$ 与转归 $x$ 所能提供给 $S$ 的支付 $x(S)$ 二者之差．如果 $e(S,x)$ 是正数，说明组成联盟 $S$ 后其总收入 $v(S)$ 超过 $x(S)$；如果 $e(S,x)$ 是负数，则说明组成联盟 $S$ 后 $v(S)$ 还比不上分配方案 $x$ 给予 $S$ 的值 $x(S)$.

利用超出值的记号，可以把上面的 (4.9) 式写成

$$e(\{i\},x)\leqslant 0,\quad i=1,\ \cdots,\ n; \tag{4.62}$$

(4.10) 式可以写成下列形式：

$$e(I,x)=0. \tag{4.63}$$

4.7 节中合作 $n$ 人对策 $\Gamma$ 的核心 $C$ 的定义是

$$C=\{x: \ x\in X; \quad v(S)-x(S)\leqslant 0, \quad S\subseteq I\}. \tag{4.49}$$

如果用超出值来表示，就是

$$C=\{x: \ x\in X; \quad e(S,x)\leqslant 0, \quad S\subseteq I\}. \tag{4.64}$$

这个定义与下式等价：

$$C=\{x: \ x\in X^*; \quad e(S,x)\leqslant 0, \quad S\subseteq I\}, \tag{4.65}$$

其中$X^*$是全体广义转归的集．

**定义3．** 设$\Gamma=[I,v]$是合作 $n$ 人对策，$\varepsilon$ 是一个实数．广义转归的集

$$C_\varepsilon=\{x: \ x\in X^*; \quad e(S,x)\leqslant\varepsilon, \ S\subset I, \ S\neq\varnothing, I\} \tag{4.66}$$

称为 $\Gamma$ 的**强 $\varepsilon$ 核心** (Strong $\varepsilon$-core)，或简称为 $\varepsilon$ 核心．

强 $\varepsilon$ 核心是由一切这样的广义转归 $x$ 组成的：在这些 $x$ 处，除$\varnothing$和 $I$ 以外的一切联盟 $S$ 的超出值都不大于 $\varepsilon$．

显然，当 $\varepsilon=0$ 时，$C_\varepsilon=C_0=C$．$\Gamma$ 的核心 $C$ 就是强 0 核心．$\varepsilon$ 当然也可以是负数．当 $\varepsilon$ 足够小时，$C_\varepsilon=\varnothing$；当 $\varepsilon$ 充分大时，$C_\varepsilon\neq\varnothing$．如果$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则 $C_{\varepsilon_1}\subseteq C_{\varepsilon_2}$．

**定义4．** 设$\Gamma=[I,v]$是合作 $n$ 人对策．$\varepsilon_0$ 是使得 $C_\varepsilon\neq\varnothing$ 的最小 $\varepsilon$，则称 $C_{\varepsilon_0}$ 为 $\Gamma$ 的**最小核心** (least core)，记为$LC$．

$\Gamma$ 的最小核心 $LC=C_{\varepsilon_0}$ 是 $\Gamma$ 的一切非空强 $\varepsilon$ 核心的交集．

我们以两个合作三人对策为例，通过几何图形来说明核心、强 $\varepsilon$ 核心和最小核心的关系．

为了书写简便，以下我们有时采用下列简写记号：

$$v(1)=v(\{1\}),$$
$$x(1)=x_1=x(\{1\}),$$
$$e(1)=e(\{1\},x),$$
$$v(13)=v(\{1,3\}),$$
$$x(23)=x(\{2,3\}),$$

$$e(23)=e(\{2,3\},x)$$

等等.

**例8.** 4.7 节例 6 中合作三人对策 Γ 的特征函数 $v$ 的值是

$$v(i)=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$v(12)=\frac{1}{3},\qquad v(13)=\frac{1}{6},\qquad v(23)=\frac{5}{6},$$

$$v(123)=1.$$

在图 4.17 中画出了 Γ 的核心 $C=C_0$ 和强 $\varepsilon$ 核心 $C_\varepsilon$ 当 $\varepsilon=\frac{1}{6}$ 和 $\varepsilon=\frac{2}{6}$ 的图形. $C$ 是个四边形, $C_{\frac{1}{6}}$ 是个五边形, $C_{\frac{2}{6}}$ 是个六边形. 最小核心是 $C_{-\frac{1}{12}}$, 它是平行于转归三角形 $X$ 的边 23 的一个直线段:

$$C_{-\frac{1}{12}}:\qquad x_1=\frac{1}{12},\qquad x_2\leqslant\frac{9}{12},\qquad x_3\leqslant\frac{7}{12}.$$

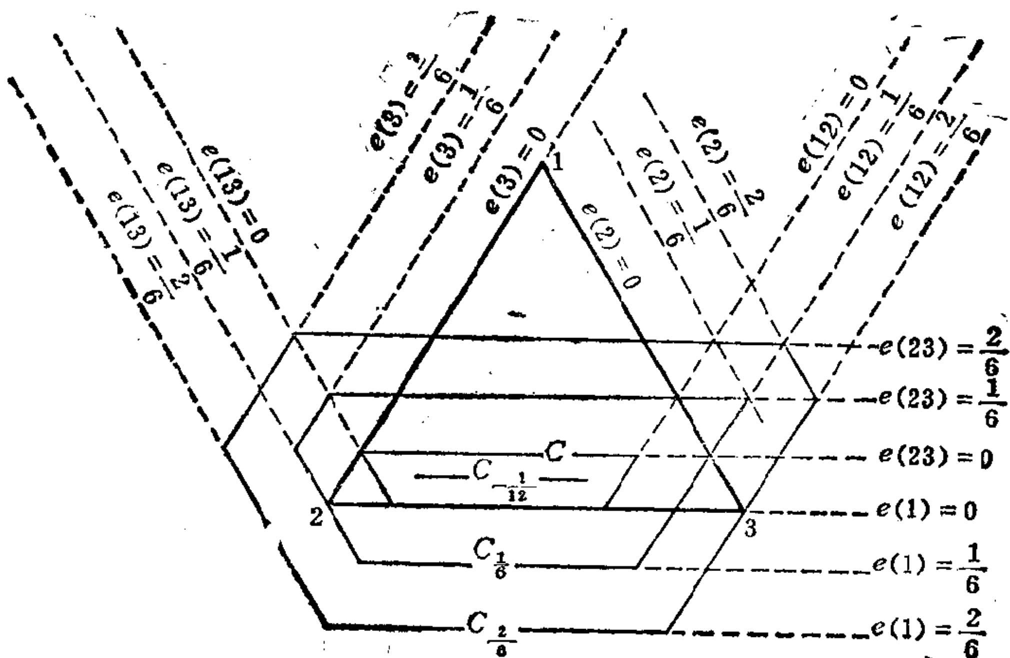



图 4.17

我们再举出一个核心为空集的合作三人对策的例子.

**例9.** 设合作三人对策 $\Gamma$ 的特征函数 $v$ 的值是

$$v(i)=0, \quad i=1, 2, 3,$$

$$v(12)=4, \quad v(13)=3, \quad v(23)=10,$$

$$v(123)=8.$$

特征函数 $v$ 不满足超可加性.

这个对策的核心 $C$ 是空集.

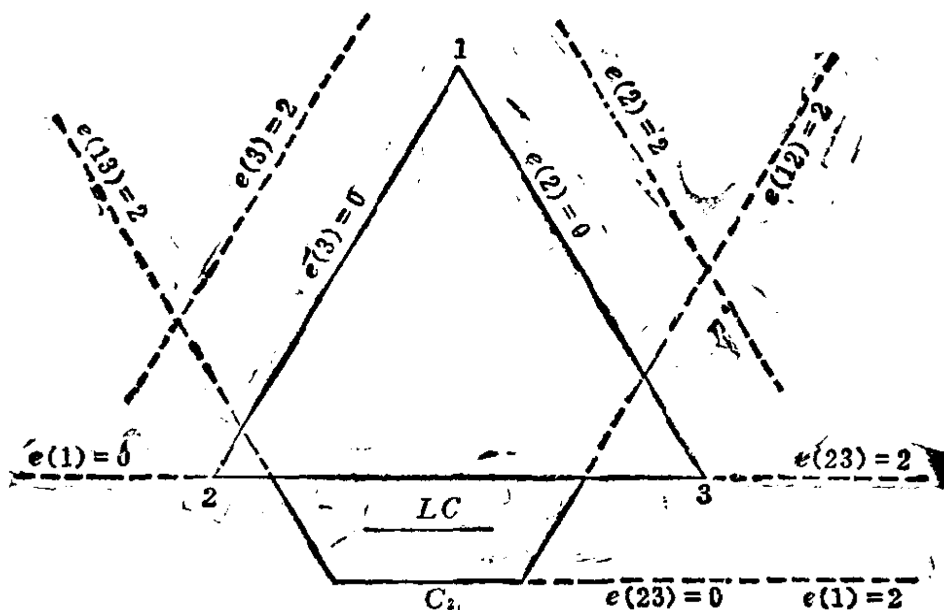



图 4.18

我们在图 4.18 中画出了这个对策的强 2 核心 $C_2$ 的图形，它是由直线 $e(1)=2$，$e(2)=2$，$e(3)=2$，$e(12)=2$，$e(13)=2$，$e(23)=2$ 围成的图形，是一个四边形域.

最小核心是

$$LC=C_1: \quad x_1=-1, \quad x_2\leqslant 6, \quad x_3\leqslant 5.$$

## 4.10. 合作 n 人对策的核

在本节中，我们介绍合作 $n$ 人对策的核（kernel）的概念及其几何意义.

设 $\Gamma=[I, v]$ 是合作 $n$ 人对策. 特征函数 $v$ 不一定满足超可

加性，已如上节所述.

我们以$T_{ij}$表示一切包含局中人$i$而不包含局中人$j$的联盟的集，即

$$T_{ij}=\{S: S\subset I, i\in S, j\notin S\}. \tag{4.67}$$

例如，当$I=\{1, 2, 3, 4\}$时，

$$T_{24}=\{\{2\}, \{2,1\}, \{2,3\}, \{2,1,3\}\}.$$

对于每一个广义转归$x\in X^*$，定义

$$s_{ij}(x)=\max_{S\in T_{ij}} e(S,x), \tag{4.68}$$

称为在$x$处局中人$i$超过$j$的最大剩余值（surplus）.

如果

$$s_{ij}(x)>s_{ji}(x), \tag{4.69}$$

则称在$x$处$i$胜过$j$（$i$ outweighs $j$）.

如果在$x$处$i$不胜过$j$，$j$也不胜过$i$，即，当

$$s_{ij}(x)=s_{ji}(x) \tag{4.70}$$

时，我们说，$i$和$j$在$x$处平衡（in equilibrium）.

以上最大剩余、胜过和平衡的概念都是对于广义转归$x\in X^*$而言的. 对于转归$x\in X$而言，最大剩余的概念完全一样. 胜过和平衡的概念则须加以修改.

在$x\in X$处，如果

$$s_{ij}(x)>s_{ji}(x), \tag{4.71}$$

且

$$x_j>v(j), \tag{4.72}$$

则$i$胜过$j$.

在$x\in X$处，如果$i$不胜过$j$，$j$也不胜过$i$，则$i$和$j$在$x$处平衡. 因此，$i$和$j$平衡的条件是

$$\left.\begin{aligned}&[s_{ij}(x)-s_{ji}(x)][x_j-v(j)]\leqslant 0, \quad (4.73)\\ &[s_{ji}(x)-s_{ij}(x)][x_i-v(i)]\leqslant 0. \quad (4.74)\end{aligned}\right\}$$

**定义1.** 合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的预核（prekernel）是广

义转归 $x\in X^*$ 的集 $K^*$，在其中的每一个 $x$ 处，每两个局中人 $i$，$j$ 关于 $X^*$ 都处于平衡状态.

由这个定义可知，广义转归 $x\in K^*$ 的充要条件是：对于每两个局中人 $i$、$j$，等式（4.70）成立.

**定义2.** 合作 $n$ 人对策 $\Gamma\equiv[I,v]$ 的核是转归 $x\in X$ 的集 $K$，在其中的每一个 $x$ 处，每两个局中人 $i$，$j$ 关于 $X$ 都处于平衡状态.

由定义 2 可知，转归 $x\in K$ 的充要条件是：对于每一对 $i$，$j$，$i\neq j$，不等式（4.73），（4.74）同时成立. 这等价于

$$s_{ij}(x)=s_{ji}(x) \tag{4.75}$$

或

$$s_{ij}(x)>s_{ji}(x),\quad x_j=v(j) \tag{4.76}$$

或

$$s_{ji}(x)>s_{ij}(x),\quad x_i=v(i). \tag{4.77}$$

比较这两个定义，预核 $K^*$ 显然比核 $K$ 容易计算.

关于预核和核，它们的存在性已得到证明. 它们的一些性质也已得到阐明. 有兴趣的读者可以参看[1]，[3]，[13]，[14]，[15]，[20]等.

对于较大的 $n$，合作对策核的计算一般说是十分复杂的；我们只通过两个合作三人对策的例子加以说明.

**例10.** 考虑上节例 8 中的合作三人对策 $\Gamma$. 它的特征函数是

$$v(i)=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$v(12)=\frac{1}{3},\qquad v(13)=\frac{1}{6},\qquad v(23)=\frac{5}{6},$$

$$v(123)=1.$$

为了计算预核 $K^*$ 和核 $K$，我们可以对于每一对 $i$，$j$ 画出方程（4.75）的图形. 例如，为了画出

$$s_{13}(x)=s_{31}(x) \tag{4.78}$$

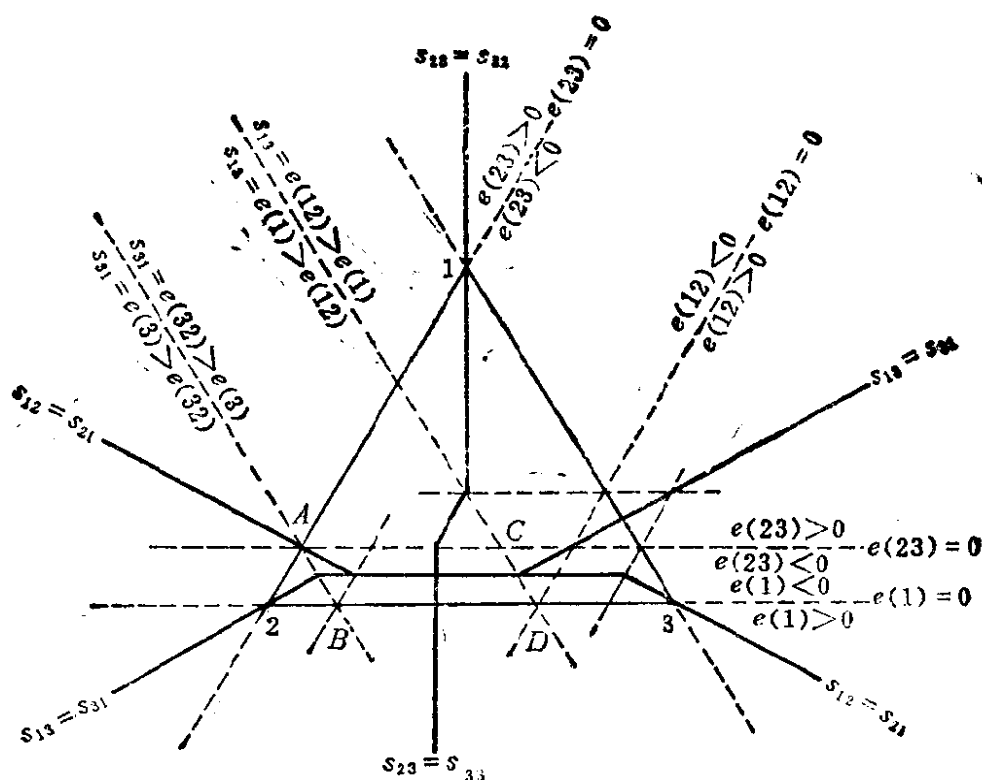


图 4.19

的图形，我们将广义转归空间 $X^*$ 分为三个区域．在图 4.19中，对于 $AB$ 左边的区域，有

$$s_{13}=e(1),\qquad s_{31}=e(3).$$

因此，$s_{13}=s_{31}$的图形就是直线$e(1)=0$ 和 $e(3)=0$的交角的等分角线．其次，在直线 $AB$ 和 $CD$ 之间的区域中，

$$s_{13}=e(1),\quad s_{31}=e(32).$$

因此，$s_{13}=s_{31}$ 的图形是 $e(1)=0$ 和 $e(32)=0$ 之间区域的平分线，也就是距 $e(1)=0$ 和 $e(32)=0$等远的直线段．同理，在 $CD$ 右边的区域中，$s_{13}=s_{31}$的图形是 $e(12)=0$ 和 $e(32)=0$ 的交角的等分角线．这样，我们就得到了 $s_{13}(x)=s_{31}(x)$的整个图形，它是由三条直线组合起来的折线。

按照同样的方法，可以画出

$$s_{12}(x)=s_{21}(x)\tag{4.79}$$

和

$$s_{23}(x)=s_{32}(x)\tag{4.80}$$

的图形，它们都是一些折线．（4.78），（4.79），（4.80）的图形交于一点．这就是说，在这一点处，等式（4.70）或(4.75)对于每一对 $i,j$ 成立．根据定义 1 和 2，每两个局中人 $i,j$ 在上述交点处都处于平衡状态．因此，这个交点既是对策 $\Gamma$ 的预核 $K^*$，又是它的核 $K$，二者重合．不难算出，

$$K^* = K = \left(\frac{1}{12}, \frac{13}{24}, \frac{9}{24}\right).$$

这一点是对策的最小核心 $LC = C_{-1/12}$ 的中点，也是核心 $C$ 的中点；参看上节例 8．

下面是特征函数 $v$ 不满足超可加性的一个例子，就是上节例 9 中的对策．

例11．合作三人对策 $\Gamma$ 的特征函数 $v$ 的值是

$$v(i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$v(12) = 4, \quad v(13) = 3, \quad v(23) = 10,$$

$$v(123) = 8.$$

我们已在例 9 中看到，这个对策的核心 $C$ 是空集．令 $\varepsilon$ 从 0 逐渐增大，当 $\varepsilon = 1$ 时，强 $\varepsilon$ 核心开始出现，它位于转归三角形 $X$ 的外面，这就是最小核心 $LC = C_1$；见图 4.20．

令 $\varepsilon$ 继续增大，到了 $\varepsilon = 2$ 时，强 $\varepsilon$ 核心开始与转归三角形 $X$ 相交．

我们按照同上面例10一样的方法画出

$$s_{12}(x) = s_{21}(x), \tag{4.81}$$

$$s_{13}(x) = s_{31}(x), \tag{4.82}$$

$$s_{23}(x) = s_{32}(x) \tag{4.83}$$

的图形．这三个方程的图形交于一点，这一点就是对策 $\Gamma$ 的预核 $K^*$．

在核 $K$ 处，则只有（4.83）一个等式成立，即

$$s_{23}(x) = s_{32}(x);$$

另外两个换成了不等式：

$$s_{21}(x) > s_{12}(x), \quad x_1 = 0 = v(1),$$

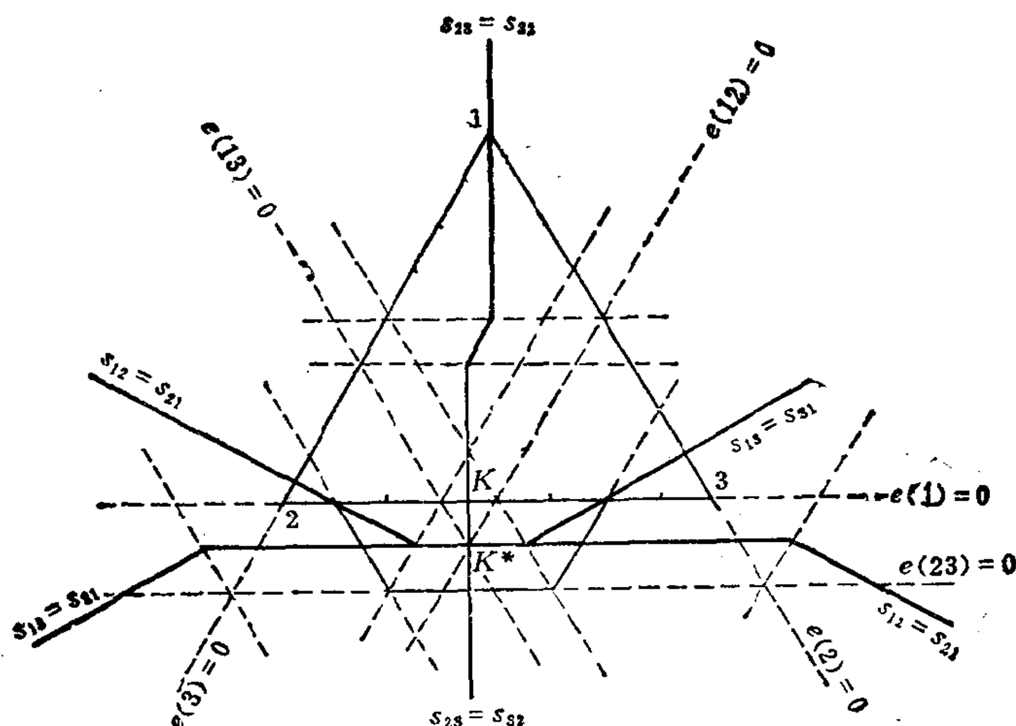



图 4.20

$$s_{31}(x)>s_{13}(x), \qquad x_1=0.$$

这两个不等式正是定义2中（4.76）或（4.77）的形式.

不难算出，预核是

$$K^*=(-1,5,4).$$

同例10的情形一样，它也是最小核心 $LC=C_1$ 的中点。

核是

$$K=(0,\ 4.5,\ 3.5).$$

以上预核和核的概念都是对于全体局中人的集$\{I\}$定义的，没有对联盟的构成加上任何限制条件. 我们现在要介绍在一定的联盟结构下对策的核的概念.

设$\mathscr{B}$是 $I$ 的一个划分（partition），即

$$\mathscr{B}=\{B_1,\cdots,B_p\}, \tag{4.84}$$

其中诸 $B_k$ 互不相交，且$\bigcup\limits_{k=1}^{p} B_k=I$.称$\mathscr{B}$为**联盟结构** (coalition

structure).

我们称

$$(x;\mathscr{B})\equiv(x_1,\ \cdots,\ x_n;\ B_1,\ \cdots,\ B_p)\quad(4.85)$$

为个体合理支付构形（individually rational payoff configuration），其中$\mathscr{B}$是一个联盟结构，

$$x=(x_1,\cdots,\ x_n)$$

是一个支付向量（payoff vector），满足

$$x_i\geqslant v(i),\quad i=1,\cdots,n,\quad(4.86)$$

$$x(B_k)=v(B_k),\quad k=1,\cdots,p.\quad(4.87)$$

在一个确定的联盟结构$\mathscr{B}$下，对于满足（4.86）和（4.87）的支付向量$x$，联盟在$x$处的超出值、最大剩余、胜过及平衡的概念都和前面一样，只是把转归向量换成了这里的支付向量，并且在涉及胜过和平衡的概念时，$i$和$j$属于同一个$B_k\in\mathscr{B}$．核的概念则可以重新定义如下：

**定义3.** 设$\mathscr{B}$是合作$n$人对策$\Gamma=[I,v]$的联盟结构．$\Gamma$关于$\mathscr{B}$的核$K$是一切这样的个体合理支付构形$(x;\mathscr{B})$的集：每一对属于同一个$B_k\in\mathscr{B}$的局中人$i,j$在$(x;\mathscr{B})$处于平衡状态．

如果$\mathscr{B}=\{I\}$，对策关于全体局中人组成的大联盟的核就是前面定义2中的核．

**例12.** 我们现在求前面例11中对策关于联盟结构

$$\{\{2,3\},\ \{1\}\},\ \{\{1,3\},\ \{2\}\},\quad \{\{1,2\},\ \{3\}\}$$

的核．

特征函数的值是

$$v(i)=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$v(12)=4,\qquad v(13)=3,\qquad v(23)=10,$$

$$v(123)=8.$$

先看联盟结构$\mathscr{B}=\{\{2,3\},\ \{1\}\}$．由（4.87），有

$$x(1)=x_1=v(1)=0,$$

$$x(23)=x_2+x_3=v(23)=10.$$

不难算出，对策关于联盟结构$\mathscr{B}=\{\{2,3\},\ \{1\}\}$的核是

$$\left(0,\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right).$$

对策关于联盟结构 $\{\{1,3\},\{2\}\}$ 和 $\{\{1,2\},\{3\}\}$ 的核分别是 $(0,0,3)$ 和 $(0,4,0)$ .

## 4.11. 合作n人对策的核仁

在本节中，我们要介绍合作$n$人对策的另一种解的概念，也就是对全体局中人如何分配$v(I)=x(I)$这个问题给出另一种解决方案.

设$\Gamma=[I,v]$是合作$n$人对策，特征函数$v$满足条件

$$v(\varnothing)=0,$$

$$v(I)\geqslant\sum_{i=1}^{n}v(i).$$

设$S\subseteq I$是局中人的一个联盟.考虑$S$在转归$x\in X$处的超出值

$$e(S,x)=v(S)-x(S).$$

我们知道，这个值的大小反映出联盟$S$对于转归$x$的“态度”. $e(S,x)$越大，$x$越不受$S$欢迎.如果对于一个固定的$x$考虑不同的$S$，则反对它最甚的是在$x$处的超出值最大的那个联盟，即，使得

$$e(S_0,x)=\max_{S\subseteq I}\ e(S,x)$$

的那个$S_0$.

对于每一个$x\in X$,我们可以列举出$I$的$2^n$个子集$S\subseteq I$在$x$处的超出值$e(S,x)$.以这$2^n$个$e(S,x)$为分量，按从大到小的次序排列，可以构成一个$2^n$维的向量

$$\theta(x)=(\theta_1(x),\cdots,\theta_{2^n}(x)),\qquad \theta_i(x)=e(S,x),\quad S\subseteq I,\qquad (4.88)$$

其中

$$\theta_1(x)\geqslant\theta_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\theta_{2^n}(x). \tag{4.89}$$

这就是说，对于一切 $i,j$，当 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2^n$，有

$$\theta_i(x)\geqslant\theta_j(x).$$

对于不同的 $x$，$y\in X$，规定 $\theta$ 的字典次序 (lexicographical order) 如下：设存在下标$k_0$，使得

$$\theta_k(x)=\theta_k(y),\qquad k<k_0, \tag{4.90}$$

$$\theta_{k_0}(x)<\theta_{k_0}(y), \tag{4.91}$$

则称 $\theta(x)$的字典次序在 $\theta(y)$之前，或者说，$\theta(x)$在字典次序上小于 $\theta(y)$，记为

$$\theta(x)\prec\theta(y). \tag{4.92}$$

"非 $\theta(y)\prec\theta(x)$" 则记为

$$\theta(x)\precsim\theta(y). \tag{4.93}$$

(4.90) 和 (4.91) 的意思就是：$\theta(x)$和$\theta(y)$的开头$k_0-1$个分量各各相等，$\theta(x)$的第 $k_0$ 个分量比 $\theta(y)$ 的第 $k_0$ 个分量小.

**定义.** 合作$n$人对策$\Gamma\equiv[I,v]$的核仁(nucleolus)是转归$x\in X$的集 $N$，在其中的每一个 $x$ 处，$\theta$ 在字典次序上为最小.即

$$N=\{x:\ x\in X;\text{对于一切 }y\in X,\theta(x)\precsim\theta(y)\}. \tag{4.94}$$

这一概念是 Schmeidler 首先提出来的，见[22].该文中证明了合作对策的核仁的存在性和唯一性，并研究了核仁的一些主要性质.下面介绍该文的主要内容.

**定理4.9.** 合作 $n$ 人对策 $\Gamma\equiv[I,v]$的核仁$N$非空.

**证明.** 首先证明，

$$\theta_i(x),\qquad i=1,\cdots,2^n \tag{4.95}$$

是 $x$ 的连续函数.为此，将 $\theta_i(x)$写成下列形式：

$$\theta_i(x)=\max\{\min\{e(S,x):\ S\in\mathscr{Y}\}:\ \mathscr{Y}\subseteq\mathscr{P}(I),|\mathscr{Y}|=i\}, \tag{4.96}$$

其中$\mathscr{P}(I)$是由 $I$ 的一切子集组成的类，即 $I$ 的幂集，$\mathscr{Y}$ 是$\mathscr{P}(I)$

的子类，$|\mathscr{Y}|$ 是$\mathscr{Y}$中元素（即联盟）的数目.

这个定义与前面 $\theta_i(x)$ 的定义是等价的．这是因为，如果在(4.96)中将 $i$ 换为 $i+1$，则

$$\theta_{i+1}(x)=\max\{\min\{e(S,x):\ S\in\mathscr{Y}\}:\ \mathscr{Y}\subseteq\mathscr{P}(I),|\mathscr{Y}|=i+1\}. \qquad (4.97)$$

比较（4.96）和（4.97）．(4.96)中的$\{e(S,x):\ S\in\mathscr{Y}\}$ 共含有 $i$ 个数.对于每一个这样的 $\{e(S,x):\ S\in\mathscr{Y}\}$，(4.97）中必有某个含 $i+1$ 个数的 $\{e(S,x):\ S\in\mathscr{Y}\}$,使得前者是后者的子集.因此，（4.96）中每个最小值不小于（4.97）中某个最小值．反之，（4.97）中每个最小值不大于（4.96）中某个最小值．再取最大值，显然有

$$\theta_i(x)\geqslant\theta_{i+1}(x).$$

上式对一切 $i=1,\cdots,2^n-1$ 成立，所以两个定义等价.

由(4.96)可知,因为 $e(S,x)$是$x$的连续函数,而且 min，max 都是连续函数的运算，所以（4.95）中的$\theta_i(x)$是 $x$的连续函数，$i=1,\cdots,2^n$.

其次，令

$$X_1=\{x:\ x\in X;\ 对于一切 y\in X,\ \theta_1(x)\leqslant\theta_1(y)\},$$

$$X_{i+1}=\{x:x\in X_i;对于一切\ y\in X_i,\theta_{i+1}(x)\leqslant\theta_{i+1}(y)\},$$

$$i=1,\cdots,2^n-1.$$

根据集 $X$ 的紧性（$X$ 为有界闭集）和 $\theta_i(x)$的连续性，$X_1,\cdots,X_{2^n}$都是非空紧集.显然，

$$X_{2^n}=N. \qquad ■$$

**定理 4.10.** 设合作 $n$ 人对策 $\Gamma\equiv[I,v]$的核仁是$N$,则 $|N|=1$，即，$N$由唯一的一个转归构成.

**证明.** 由于全体转归的集$X$是一个凸集,因此,如果 $x\in N$，$y\in N$，$x\neq y$，则必有

$$\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)\succsim\theta(x)=\theta(y). \qquad (4.98)$$

今对 $z=(z_1,\cdots,z_r)$ 定义函数 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_r)$ 如下：

$\eta_i(z)=\max\{\min\{z_j:j\in A\}:A\subseteq\{1,\cdots,r\},\ |A|=i\},i=1,\cdots,r.$

$\eta$ 的一个等价的定义是下面的（1），（2）两条：

（1）$\eta_1(z)=\max\{z_t:t=1,\cdots,r\}.$

（2）如果已知 $\eta_1(z)=z_{j_1},\cdots,\eta_i(z)=z_{j_i}$，则

$\eta_{i+1}(z)=\max\{z_t:t\neq j_1,\cdots,j_i\}$，

这里 $i=1,\cdots,r-1.$

这个函数将向量 $z$ 的分量按照从大到小的次序排列，是一个次序函数.

在上述定义下，对于 $R^r$ 中任意两点 $u,w$，我们有

$$\eta(u+w)\precsim\eta(u)+\eta(w). \qquad (4.99)$$

下面就来证明这个关系式.

设

$$\eta_t(u)=u_{i_t},\quad t=1,\cdots,r,$$
$$\eta_t(w)=w_{j_t},\quad t=1,\cdots,r,$$
$$\eta_t(u+w)=u_{k_t}+w_{k_t},\quad t=1,\cdots,r.$$

显然有

$$u_{k_1}\leqslant u_{i_1},\quad w_{k_1}\leqslant w_{j_1}. \qquad (4.100)$$

因此，

$$\eta_1(u+w)=u_{k_1}+w_{k_1}\leqslant u_{i_1}+w_{j_1}=\eta_1(u)+\eta_1(w). \qquad (4.101)$$

当上式中不等号"<"成立时，有

$$\eta(u+w)\prec\eta(u)+\eta(w). \qquad (4.102)$$

当（4.101）中等号成立时，由（4.100）可知，必有

$$u_{k_1}=u_{i_1},\qquad w_{k_1}=w_{j_1}.$$

这时，如果对于一切 $t=1,\cdots,r$ 有

$$u_{k_t}=u_{i_t},\qquad w_{k_t}=w_{j_t}, \qquad (4.103)$$

则

$$\eta_t(u+w)=\eta_t(u)+\eta_t(w),\qquad t=1,\cdots,r,$$

因而

$$\eta(u+w)=\eta(u)+\eta(w). \tag{4.104}$$

剩下要考虑的是（4.103）对于某些 $t$ 不成立的情形.我们可以假定，对于某个 $s$，$1\leqslant s<r$，有

$$u_{k_t}=u_{i_t},\qquad w_{k_t}=w_{j_t},\qquad t=1,\cdots,s, \tag{4.105}$$

而

$$u_{k_{s+1}}\neq u_{i_{s+1}}. \tag{4.106}$$

我们得到

$$\begin{aligned}u_{k_{s+1}}&\leqslant\max\{u_i:\ i\neq k_1,\cdots,k_s\}\\&=\max\{u_i:\ i\neq i_1,\cdots,i_s\}.\end{aligned} \tag{4.107}$$

但由前面次序函数 $\eta$ 的定义中的（2），

$$\eta_{s+1}(u)=u_{i_{s+1}}=\max\{u_i,i\neq i_1,\cdots,i_s\}. \tag{4.108}$$

由（4.106），（4.107），（4.108）有

$$u_{k_{s+1}}<u_{i_{s+1}}. \tag{4.109}$$

同理，由（4.105）中的第二个等式和 $\eta$ 的定义可以得到

$$w_{k_{s+1}}\leqslant w_{j_{s+1}}. \tag{4.110}$$

由（4.109），（4.110）和 $\eta$ 的定义，

$$\begin{aligned}\eta_{s+1}(u+w)&=u_{k_{s+1}}+w_{k_{s+1}}<u_{i_{s+1}}+w_{j_{s+1}}\\&=\eta_{s+1}(u)+\eta_{s+1}(w).\end{aligned}$$

因此，

$$\eta(u+w)\prec\eta(u)+\eta(w). \tag{4.111}$$

把（4.102），（4.104），（4.111）合在一起，我们就证明了（4.99）式成立.

此外，从上面的证明中还可以看出来，如果

$$\eta(u+w)=\eta(u)+\eta(w),$$

则

$$u_{k_t}=u_{l_t},\ w_{k_t}=w_{j_t},\ t=1,\cdots,r. \tag{4.112}$$

我们现在回到空间$R^{2^n}$中的向量

$$\{e(S,x):\ S\subseteq I\},$$
$$\{e(S,y):\ S\subseteq I\},$$
$$\{e(S,x)+e(S,y):\ S\subseteq I\}.$$

对这三个向量应用次序函数$\eta$，不难看出，

$$\eta\{e(S,x):\ S\subseteq I\}=\theta(x),$$
$$\eta\{e(S,y):\ S\subseteq I\}=\theta(y),$$
$$\begin{aligned}\eta\{e(S,x)+e(S,y):\ S\subseteq I\}&\\ &=\eta\{2v(S)-x(S)-y(S):\ S\subseteq I\}\\ &=\eta\left\{2\left[v(S)-\frac{x+y}{2}(S)\right]:\ S\subseteq I\right\}\\ &=2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

根据上面证明的（4.99）式，得到

$$2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)\precsim\theta(x)+\theta(y). \tag{4.113}$$

如果

$$2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)\prec\theta(x)+\theta(y),$$

则与（4.98）相矛盾.

如果

$$2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)=\theta(x)+\theta(y),$$

则令

$$\theta_t(x)=e(S_{i_t},x),\ t=1,\cdots,2^n,$$
$$\theta_t(y)=e(S_{j_t},y),\ t=1,\cdots,2^n,$$

$$2\theta_t\left(\frac{x+y}{2}\right)=e(S_{k_t},x)+e(S_{k_t},y), \quad t=1,\cdots,2^n.$$

由（4.112）可知，对于一切 $t=1,\cdots,2^n$，有

$$e(S_{k_t},x)=e(S_{l_t},x),$$

$$e(S_{k_t},y)=e(S_{l_t},y).$$

利用假设条件 $\theta(x)=\theta(y)$，我们得到

$$e(S_{k_t},x)=e(S_{k_t},y), \quad t=1,\cdots,2^n,$$

即

$$v(S_{k_t})-x(S_{k_t})=v(S_{k_t})-y(S_{k_t}), \quad t=1,\cdots,2^n,$$

即

$$x(S_{k_t})=y(S_{k_t}), \quad t=1,\cdots,2^n.$$

这就是说，对于一切 $S\subseteq I$，等式

$$x(S)=y(S)$$

成立. 由此可知，$x=y$，这与原来的假设条件 $x\neq y$ 相矛盾.

我们证明了当 $x\in N$，$y\in N$ 时必有 $x=y$. ■

定理 4.9 和 4.10表明，对于每一个合作对策Γ，存在唯一的一个转归 $x=N$. 下面的定理表明，这个核仁 $N$ 必在Γ的核 $K$ 中.

**定理4.11.** 设合作 $n$ 人对策 $\Gamma=[I,v]$ 的核是 $K$，核仁是 $N$，则 $N\subseteq K$.

**证明.** 设 $x\in N$，$x\notin K$，则存在 $i,j$，使 $i$ 在 $x$ 胜过 $j$，因而存在充分小的 $\varepsilon>0$ 使

$$s_{ij}(x)>s_{ji}(x), \quad x_j-\varepsilon>v(j). \qquad (4.114)$$

设 $\alpha$ 是另一个充分小的正数（我们将在后面的（4.126）式前用到它）. 令

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\varepsilon,\ s_{ij}(x)-s_{ji}(x),\ \alpha\}. \qquad (4.115)$$

考虑转归

$$x^\delta=x-\delta e^j+\delta e^i, \qquad (4.116)$$

其中 $e^j$ 是第 $j$ 个分量为 1 的单位向量. $x^\delta$ 是在 $x$ 处局中人 $j$ 将量 $\delta$ 转移给局中人 $i$ 后得到的新的转归. 由 (4.115) 和 (4.114) 中第二式可知,

$$x_j - \delta > x_j - \varepsilon > v(j),$$

所以 $x^\delta$ 仍在 $X$ 中.

以下我们证明

$$\theta(x^\delta) \prec \theta(x). \tag{4.117}$$

如果 (4.117) 式成立, 则 $x$ 不在 $\Gamma$ 的核仁中, 与假设相矛盾, 定理就得到了证明.

我们把 $I$ 的全部子集 $S$ (共有 $2^n$ 个) 分成下列三类, 比较它们在 $x$ 和 $x^\delta$ 处超出值的大小.

(1) $T_{ij} = \{S: i \in S,\ j \notin S\}$ 中的 $S$. 这些 $S$ 中至少有一个, 设为 $R$, 它在 $x$ 处的超出值是

$$e(R, x) = s_{ij}(x). \tag{4.118}$$

其他的 $S$ 都满足

$$e(S, x) \leqslant s_{ij}(x). \tag{4.119}$$

$R$ 在 $x^\delta$ 处的超出值是

$$\begin{aligned} e(R, x^\delta) &= v(R) - [x(R) + \delta] \\ &= e(R, x) - \delta = s_{ij}(x) - \delta. \end{aligned} \tag{4.120}$$

其他的 $S$ 都满足

$$e(S, x^\delta) = e(S, x) - \delta \leqslant s_{ij}(x) - \delta. \tag{4.121}$$

(2) $T_{ji} = \{S: j \in S,\ i \notin S\}$ 中的 $S$. 这些 $S$ 在 $x$ 处的超出值是

$$e(S, x) \leqslant s_{ji}(x) < s_{ij}(x). \tag{4.122}$$

它们在 $x^\delta$ 处的超出值是

$$\begin{aligned} e(S, x^\delta) &= e(S, x) + \delta \\ &\leqslant s_{ji}(x) + \delta \leqslant s_{ij}(x) - \delta. \end{aligned} \tag{4.123}$$

(3) $\{S: i, j \in S$ 或 $i, j \notin S\}$ 中的 $S$. 对于这些 $S$, 我们有

$$e(S, x^\delta) = e(S, x).$$

设其中共有 $k$ 个 $S$ 满足

$$e(S,x^\delta)=e(S,x)\geqslant s_{ij}(x). \tag{4.124}$$

其他的 $S$ 都满足

$$e(S,x^\delta)=e(S,x)<s_{ij}(x). \tag{4.125}$$

可设这些$S$都满足

$$e(S,x^\delta)<s_{ij}(x)-\alpha,$$

其中 $\alpha>0$是一个充分小的数，则由（4.115），

$$e(S,x^\delta)<s_{ij}(x)-\delta. \tag{4.126}$$

比较（4.118）至（4.126）式，根据次序函数 $\eta$ 即 $\theta$ 的定义，由于 $x\in N$，我们得到

$$\theta_m(x^\delta)=\theta_m(x)\geqslant s_{ij}(x),\quad m=1,\cdots,k, \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}\theta_{k+1}(x^\delta)&=e(R,x^\delta)=s_{ij}-\delta\\&<s_{ij}(x)=e(R,x)=\theta_{k+1}(x).\end{aligned} \tag{4.128}$$

由（4.127），（4.128）得到

$$\theta(x^\delta)\prec\theta(x),$$

这就是要证明的（4.117）式. ■

根据这个定理，如果一个合作 $n$ 人对策的核 $K$ 只由一个点构成，则这个点同时也就是对策的核仁.例如，上节例10和例11的核都是一个唯一的点，因而这个点也是对策的核仁.

顺便指出，在一般情形，如果对策的最小核心 $LC$ 或核$K$ 是一个直线段，它的核仁并不一定就是这个直线段的中点.当 $n=4$ 时就存在这样的例子；参看〔15〕.

这个定理不但说明了合作对策的核仁 $N$ 含在核 $K$ 之中，而且为 $K$ 的存在性提供了一种新的证明，比以往关于 $K$ 存在的证明简单得多.

本节核仁的概念是对于全体局中人的集$\{I\}$定义的.同核的情况一样，也可以对于一定的联盟结构$\mathscr{B}$定义核仁的概念.这里不讨论这个问题了.

## 4.12. Shapley 值

Shapley 值是另一种将 $v(I)$ 分配给 $n$ 个局中人的支付方案. 早在 1952 年, Shapley〔23〕就发现了这一著名的定理. 从三条公理出发, 该文确定了分配给合作 $n$ 人对策全体局中人的一组值, 这组值是满足三条公理的唯一的一组值.

在本节中, 我们所考虑的特征函数 $v$ 同以前一样仍满足下列条件:

$$v(\varnothing)=0,$$

$$v(I)\geqslant\sum_{i=1}^{n}v(i).$$

一个合作 $n$ 人对策 $\Gamma\equiv[I,v]$ 的性质由它的特征函数 $v$ 完全确定. 因此, 我们对一个合作 $n$ 人对策的研究, 就是对一个定义在 $I=\{1,\cdots,n\}$ 的全体子集类上的特征函数 $v$ 的研究. 也可以称 $v$ 为对策.

**定义1.** 设 $N\subseteq I$ 是一个联盟. 如果对于一切 $S\subseteq I$ 有

$$v(S)=v(S\cap N)+\sum_{i\in S\setminus N}v(i), \tag{4.129}$$

则称 $N$ 为对策的支柱 (carrier).

如果 $N$ 是对策 $v$ 的一个支柱, 则包含 $N$ 的任何集仍是 $v$ 的支柱. 证明如下.

设 $N$ 是一个支柱, 则对于任何 $S\subseteq I$,

$$v(S)=v(S\cap N)+\sum_{i\in S\setminus N}v(i).$$

今设 $N'\supset N$, 则

$$v(S\cap N')=v((S\cap N')\cap N)+\sum_{i\in(S\cap N')\setminus N}v(i)$$

$$=v(S\cap N)+\sum_{i\in(S\cap N')\setminus N}v(i)$$

$$=v(S)-\sum_{i\in S\setminus N}v(i)+\sum_{i\in(S\cap N')\setminus N}v(i).$$

我们得到

$$v(S)=v(S\cap N')+\sum_{i\in S\setminus N}v(i)-\sum_{i\in(S\cap N')\setminus N}v(i)$$

$$=v(S\cap N')+\sum_{i\in(S\setminus(S\cap N'))\setminus N}v(i)$$

$$=v(S\cap N')+\sum_{i\in S\setminus N'}v(i).$$

上式对一切$S\subseteq I$成立.因此，$N'$也是$v$的一个支柱.

一个局中人如果不属于某个支柱，则这个局中人对任何联盟不能作出任何贡献，因而对于对策的进行和结局不产生任何直接的影响.

设$\pi$是$I=\{1,\cdots,n\}$的一个排列，也就是$I$在它自身上的一个一一映射.以$\pi S$表示联盟$S$在排列$\pi$下的象集.又若$\pi i=j$，则$j$是$i$在$\pi$下的象.以$\pi(I)$表示定义在$I$上的全体排列组成的集.

**定义2.** 合作$n$人对策$\Gamma=[I,v]$的Shapley值是函数

$$\Phi(v)=(\Phi_1(v),\cdots,\Phi_n(v)),$$

满足下面三条公理：

**公理1. 对称性公理.** 如果对于$\pi\in\pi(I)$和每一个$S\subseteq I$有

$$v(\pi S)=v(S),$$

则

$$\Phi_{\pi i}(v)=\Phi_i(v).$$

**公理2. 有效性公理.** 对于$\Gamma$的每一个支柱$N$，

$$\sum_{i\in N}\Phi_i(v)=v(N).$$

**公理3. 聚合律.** 对于定义在 $I$ 的全体子集类上的任意两个特征函数 $v$ 和 $w$，

$$\Phi(v+w)=\Phi(v)+\Phi(w).$$

**引理1.** 如果 $N$ 是 $\Gamma\equiv[I,v]$的一个支柱，则对于 $i\notin N$，

$$\Phi_i(v)=v(i).$$

**证明.** 设 $i\notin N$.因为 $N$ 是 $\Gamma$ 的支柱，所以

$$v(N\cup i)=v([N\cup i]\cap N)+\sum_{k\in(N\cup i)\setminus N}v(k)$$

$$=v(N)+v(i).$$

又因为 $N\cup i$ 也是支柱，因此，由公理2，

$$\sum_{k\in N\cup i}\Phi_k(v)=v(N)+\Phi_i(v)=v(N\cup i),$$

因而

$$\Phi_i(v)=v(i).$$ ■

今考虑下述对策.设 $R\subseteq I$，$R\neq\varnothing$.对于每一个 $S\subseteq I$，定义

$$v_R(S)=\begin{cases}1, & 若S\supseteq R,\\ 0, & 若S\not\supseteq R.\end{cases}\tag{4.130}$$

容易验证，对于任意的 $c>0$，$cv_R$是一个特征函数，$R$为其支柱.

引理2. 设$c>0$，$R\subseteq I$，$|R|>0$，则

$$\Phi_i(cv_R)=\begin{cases}\dfrac{c}{|R|}, & 若\ i\in R,\\ 0, & 若\ i\notin R.\end{cases}\tag{4.131}$$

**证明.** 设 $i,j\in R$.选择一个排列 $\pi\in\pi(I)$，使得

$$\pi R=R,\ \pi i=j.$$

则若 $i\notin R$，必有 $\pi i\notin R$.我们有

$$cv_R(S)=\begin{cases}c, & 若\ S\supseteq R,\\ 0. & 若\ S\not\supseteq R,\end{cases}$$

$R$ 为 $cv_R$ 的支柱.

由公理1，

$$\Phi_j(cv_R) = \Phi_i(cv_R), \quad i, j \in R.$$

由公理2，

$$|R|\,\Phi_i(cv_R) = \sum_{i \in R} \Phi_i(cv_R) = cv_R(R) = c.$$

因此，

$$\Phi_i(cv_R) = \frac{c}{|R|}, \qquad i \in R.$$

若 $i \notin R$，由引理1，

$$\Phi_i(cv_R) = cv_R(i) = 0. \qquad \blacksquare$$

**引理3.** 合作 $n$ 人对策 $\Gamma = [I, v]$ 的特征函数 $v$ 可以表为 $v_R$ 的线性组合：

$$v = \sum_{R \subseteq I} \lambda_R v_R, \tag{4.132}$$

其中诸系数 $\lambda_R$ 由下列公式确定：

$$\lambda_R = \sum_{T \subseteq R} (-1)^{|R|-|T|} v(T). \tag{4.133}$$

**证明.** 将（4.133）代入（4.132），对于每一个 $S \subseteq I$：

$$v(S) = \sum_{R \subseteq I} \left[ \sum_{T \subseteq R} (-1)^{|R|-|T|} v(T) \right] v_R(S). \tag{4.134}$$

在上式中，只有当 $R \subseteq S$ 时 $v_R(S)$ 才不为 0. 并且当 $R \subseteq S$ 时由（4.130）有 $v_R(S) = 1$. 所以

$$v(S) = \sum_{R \subseteq S} \left[ \sum_{T \subseteq R} (-1)^{|R|-|T|} v(T) \right].$$

交换求和的次序，上式化为

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{\substack{R \subseteq S \\ R \supseteq T}} (-1)^{|R|-|T|} v(T)$$

$$= \sum_{T \subseteq S} \left[ \sum_{|R| = |T|}^{|S|} (-1)^{|R|-|T|} \binom{|S| - |T|}{|R| - |T|} \right] v(T),$$

其中$\binom{|S|-|T|}{|R|-|T|}=C^{|R|-|T|}_{|S|-|T|}$是组合的记号，上式中的方括号除$|T|=|S|$外均为0，$|T|=|S|$时方括号的值为1：

$$v(S)=v(S)+\sum_{\substack{T\subseteq S\\T\neq S}}(1-1)^{|S|-|T|}v(T)=v(S).$$ ∎

这就证明了当$S\subseteq I$时（4.134）成立.

现在来计算$\Phi_i(v)$.由（4.132），

$$v=\sum_{R\subseteq I}\lambda_R v_R.$$

将上式分为两项：

$$v=\sum_{\substack{R\subseteq I\\\lambda_R>0}}\lambda_R v_R-\sum_{\substack{R\subseteq I\\\lambda_R<0}}(-\lambda_R)v_R.$$

利用公理3，由上式可以得到

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{R\subseteq I\\\lambda_R>0}}\Phi_i(\lambda_R v_R)-\sum_{\substack{R\subseteq I\\\lambda_R<0}}\Phi_i((-\lambda_R)v_R).$$

由（4.131），当$i\notin R$时$\Phi_i(cv_R)=0$，所以上式又可化为

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{i\in R\subseteq I\\\lambda_R>0}}\frac{\lambda_R}{|R|}+\sum_{\substack{i\in R\subseteq I\\\lambda_R<0}}\frac{\lambda_R}{|R|},$$

即

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{R\subseteq I\\R\ni i}}\frac{\lambda_R}{|R|}. \qquad (4.135)$$

将（4.133）代入（4.135），得到

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{R\subseteq I\\R\ni i}}\frac{1}{|R|}\sum_{S\subseteq R}(-1)^{|R|-|S|}v(S)$$

$$=\sum_{S\subseteq I}\left[\sum_{\substack{R\supseteq S\\R\ni i}}\frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|}\right]v(S),$$

或

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{S\subseteq I \\ S\ni i}} \left[ \sum_{R\supseteq S} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|} \right] v(S)$$

$$+ \sum_{\substack{S\subseteq I \\ S\not\ni i}} \left[ \sum_{R\supseteq S\cup i} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|} \right] v(S). \tag{4.136}$$

但

$$\sum_{R\supseteq S} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|}$$

$$= \sum_{|R|=|S|}^{n} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|} \binom{n-|S|}{|R|-|S|}$$

$$= \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}. \tag{4.137}$$

在（4.136）最末一项中将 $S\cup i$ 记为 $S'$，则 $S=S'\setminus i$，该项化为

$$\sum_{\substack{S'\setminus i\subseteq I \\ S'\ni i}} \sum_{R\supseteq S'} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S'|-1} v(S'\setminus i)$$

$$= -\sum_{\substack{S'\subseteq I \\ S'\ni i}} \sum_{R\supseteq S'} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S'|} v(S'\setminus i)$$

$$= -\sum_{\substack{S\subseteq I \\ S\ni i}} \sum_{R\supseteq S} \frac{1}{|R|}(-1)^{|R|-|S|} v(S\setminus i). \tag{4.138}$$

将（4.137）和（4.138）代回（4.136），即得

$$\Phi_i(v) = \sum_{S\ni i} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!} \Big[ v(S) - v(S\setminus i) \Big]. \tag{4.139}$$

当 $i=1,\cdots,n$，得到对策 $v$ 的 Shapley 值

$$\Phi(v)=(\Phi_1(v),\cdots,\Phi_n(v)).$$

**定理4.12.** 设$\Gamma\equiv[I,v]$是合作$n$人对策.存在唯一的一组Shapley值

$$\Phi_i(v)=\sum_{S\ni i}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}[v(S)-v(S\setminus i)],$$

$i=1,\cdots,n.$ (4.139)

**证明.** 应当验证，(4.139)式中的$\Phi$满足定义2中的三条公理.

(1)对称性公理.

设$\pi\in\pi(I)$，$v(\pi S)=v(S)$，则$|\pi S|=|S|$.由(4.139)有

$$\Phi_{\pi i}(v)$$

$$=\sum_{\pi S\subseteq\pi I}\frac{(n-|\pi S|)!(|\pi S|-1)!}{n!}\left[v(\pi S)-v(\pi(S\setminus i))\right]$$

$$=\sum_{S\subseteq I}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus i)\right]$$

$$=\Phi_i(v).$$

(2)有效性公理.

若$i$不属于每个支柱，则它也不属于最小的支柱(即一切支柱的交集)，因而对于每一个$S\subseteq I$，$S\ni i$，有

$$v(S)-v(S\setminus i)=v(i).$$

代入(4.139)式，得到

$$\Phi_i(v)=v(i)\sum_{\substack{S\subseteq I\\ S\ni i}}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}.$$

将上式右边和式中含同样数目局中人的那些$S$合并在一起.例如，含$k$个局中人并且其中包含$i$的$S$，这种$S$共有$\binom{n-1}{k-1}$

个. 因此,

$$\Phi_i(v)=v(i)\sum_{k=1}^{n}\sum_{|S|=k}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}$$

$$=v(i)\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=v(i)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=v(i)\cdot n\cdot\frac{1}{n}=v(i). \qquad (4.140)$$

下面再证明

$$\sum_{i\in I}\Phi_i(v)=v(I).$$

由 (4.139),

$$\sum_{i\in I}\Phi_i(v)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{S\ni i}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}\Big[v(S)-v(S\setminus i)\Big] \qquad (4.141)$$

我们来考虑一个固定的联盟 $R\subseteq I$. 在上面这个双重和式中, 方括号里被减式出现 $v(R)$ 共计 $|R|$ 次, 因而整个和式中对应于这些 $v(R)$ 的系数之和是

$$|R|\ \frac{(n-|R|)!(|R|-1)!}{n!}=\frac{(n-|R|)!|R|!}{n!}.$$

(4.142)

上式对于一切 $R\subseteq I$ 成立. 当 $R=I$ 时, 上式等于1. 这就是说, 方括号被减式中 $v(I)$ 的系数为 1.

方括号里第二项 $v(S\setminus i)$ 有 $n-|R|$ 次等于 $v(R)$. 这是因为, $i$ 可以是 $I\setminus R$ 中的任何一个元素. 因此, 整个和式中对应于这些 $v(R)$ 的系数之和是

$$-(n-|R|)\frac{[n-(|R|+1)]![|R|+1-1]!}{n!}$$

$$= -\frac{(n-|R|)!\,|R|!}{n!}. \qquad (4.143)$$

上式对于一切 $|R| \neq n$ 即一切 $R \neq I$ 成立. 当 $R = I$ 时，上式等于零.

综合以上分析，（4.141）式右边只剩下一项，即 $v(I)$，其系数为 1，其余的都正负相抵消了. 因此，

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I). \qquad (4.144)$$

今设$N$是对策 $v$ 的一个支柱，则由定义（4.129），有

$$v(I) = v(I \cap N) + \sum_{i \in I \setminus N} v(i),$$

即

$$v(I) = v(N) + \sum_{i \in N} v(i).$$

由（4.144），

$$v(I) = \sum_{i \in I} \Phi_i(v);$$

又由（4.140），

$$\sum_{i \in N} v(i) = \sum_{i \in N} \Phi_i(v).$$

所以

$$v(N) = \sum_{i \in I} \Phi_i(v) - \sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} \Phi_i(v).$$

这就证明了$\Phi$满足有效性公理.

（3）聚合律.

$\Phi$是 $v$ 的线性函数，因此，$\Phi$满足公理 3.

Shapley 值是满足三条公理的唯一的一组值，这一事实可从公式的推导过程直接看出来. ■

**例 13.** 4.10 节例 10 中的合作三人对策 $v$ 的值是

$$v(i) = 0, \quad i = 1,2,3,$$

$$v(12)=\frac{1}{3},\ v(13)=\frac{1}{6},\ v(23)=\frac{5}{6},$$

$$v(123)=1.$$

我们在 4.9 节和 4.10 节中已经算出，对策的最小核心是

$$LC=C_{-\frac{1}{12}}:\qquad x_1=\frac{1}{12},\ x_2\leqslant\frac{9}{12},\ x_3\leqslant\frac{7}{12}.$$

对策的预核$K^*$和核$K$是最小核心的中点：

$$K^*=K=\left(\frac{1}{12},\frac{13}{24},\frac{9}{24}\right),$$

它也是对策的核仁.

这个对策的 Shapley 值是

$$\Phi(v)=\left(\frac{5}{36},\ \frac{17}{36},\ \frac{14}{36}\right).$$

例14. 对策论文献中常常引用的一个例子是所谓“投票对策”. 五个局中人，局中人 1 拥有三张投票权，其余的局中人2,3,4,5各有一张投票权. 自由结成联盟后，总票数过半即可获胜.

如果把这个合作对策用（0,1）规范化特征函数 $v$ 表示出来，就是

$$\begin{aligned}
&v(\varnothing)=0,\\
&v(12)=v(13)=v(14)=v(15)=1,\\
&v(123)=v(124)=v(125)\\
&\qquad=v(134)=v(135)=v(145)=1,\\
&v(1234)=v(1235)=v(1245)\\
&\qquad=v(1345)=v(2345)=1,\\
&v(12345)=1,\\
&v(S)=0,\quad \text{对于其他的}S.
\end{aligned}$$

容易算出，Shapley 值是

$$\Phi(v)=\left(\frac{6}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10}\right).$$

这个对策关于全体局中人的大联盟的核$K$和核仁$N$是

$$K=N=\left(\frac{3}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7}\right).$$

# 参 考 文 献


[ 1 ]Aumann, R. J., B. Peleg, and P. Rabinowitz, A Method for Computing the Kernel of n-Person Games, *Mathematics of Computation*, Vol. 19 (1965), pp.531—551.

[ 2 ]Dantzig,G. B.,Constructive Proof of the Min-Max Theorem, *Pacific J. Math.*, Vol. 6 (1956), pp. 25—33.

[ 3 ]Davis, M., and M. Maschler, The Kernel of a Cooperative Game, *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 12, No. 3/4 (1965), pp. 223—259.

[ 4 ]Dragan, I., A Procedure for Finding the Nucleolus of a Cooperative n-Person Game, *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 25 (1981), pp. 119—131.

[ 5 ]Dresher, Melvin, *Games of Strategy, Theory and Applications*, Prentice-Hall, N. J. (1961, 1963).

[ 6 ]Glicksman, A. M., *An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games*, John Wiley and Sons, New York (1963).

[ 7 ]Jones, A. J., *Game Theory: Mathematical Models of Conflict*, Ellis Horwood, West Sussex (1980).

[ 8 ]Karlin, Samuel, *Mathematical Methods and Theory in Games. Programming and Economics*, Addison-Wesley, Reading, Mass.(1959).

[ 9 ]Loomis, L. H.,On a Theorem of von Neumann, *Proc. Nat.Acad.Sci., USA*, Vol. 32 (1946), pp. 213—215.

[10]Lucas,W.F.,The Proof that a Game May not Have a Solution,*Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 137, No. 402 (1969), pp. 219—229.

[11]Lucas, W. F., Some Recent Developments in n-Person Game Theory, *SIAM Review*, Vol. 13, No. 4(1971), pp. 491—523.

[12]Luce, R. D., and H. Raiffa, *Games and Decisions*, John wiley and Sons, New York (1957).

[13]Maschler, M., and B. Peleg,A Characterization, Existence Proof and Dimension Bounds for the Kernel of a Game, *Pacific J. Math.*, Vol. 18 (1966), pp. 289—328.

[14]Maschler, M., B. Peleg, and L. S. Shapley, The Kernel and Bargaining Set for Convex Games, *Internat. J. Game Theory*, Vol. 1 (1972),pp. 73—93.

[15]Maschler, M., B. Peleg, and L. S. Shapley, Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus, and Related Solution Concepts, *Math. Op. Res.*, Vol. 4, No. 4 (1979),pp. 303—338.

[16]McKinsey, J. C.C., *Introduction to the Theory of Games*, McGraw-Hill, New York (1952).(博奕论导引，高鸿勋等译，人民教育出版社，1960).
[17]Nash, J. F., Equilibrium Points in n-Person Games, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, Vol. 36 (1950), pp. 48—49.
[18]Nash, J. F., Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics*, Vol. 54, No. 2 (1951), pp. 286—295.
[19]von Neumann, J., and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1944, 1947, 1953). (竞赛论与经济行为，王建华、顾玮琳译，科学出版社，1963).
[20]Peleg, B., The Kernel of the General-Sum Four-Person Game, *Canadian J. Math.*, Vol. 18, No. 4 (1966), pp. 673—677.
[21]Rosenmüller, J., *The Theory of Games and Markets*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1981).
[22]Schmeidler, David, The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM J. App. Math.*, Vol. 17, No. 6 (1969), pp. 1163—1170.
[23]Shapley, L. S., A Value for n-Person Game, *Contributions to the Theory of Games, Vol. II*, Annals of Mathematics Studies No. 28, Kuhn and Tucker, eds. (1953), pp. 307—317.
[24]Vajda, S., *The Theory of Games and Linear Programming*, Methuen, London (1956).
[25]Vorob'ev, N. N., *Game Theory, Lectures for Economists and System Scientists*, Springer-Verlag, New York (1977).
[26]Wang, Jianhua (王建华), An Inductive Proof of von Neumann's Minimax Theorem, *Chinese Journal of Operations Research*(运筹学杂志), vol. 1, No. 1 (1982).
[27]Wang, Jianhua (王建华),Inductive proof of a Saddle Point Theorem, *Journal of Mathematical Research and Exposition* (数学研究与评论), vol. 3, No. 1 (1983).
[28]Williams, J. D., *The Compleat Strategyst*, McGraw-Hill, New York (1954).
[29]宫泽光一，博奕论 (1958) (张铱椿译，上海科学技术出版社，1963)．